

Leyde

2133

OVER EENIGE GEVALLEN

THEORIE

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN.

WAAR MÏN TE ONDERZOEKEN HEET, OF HET ONEINDIGE
VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN GEHEEL OF
OPGEKOKEN VOEM ZIJ.

D. RIERS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

AMSTERDAM
C. G. VAN DER POST.
1868.



BIJBEHANDEL
VAN
D. NOOTHOVEN VAN GOOR,
Dordrecht, wijk 6, No. 264.



OVER EENIGE GEVALLEN

142299

DE

THEORIE

VAN

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN.

WAAR MEN TE ONDERSCHIEDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE
VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN GEHEELE OF
GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR



D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.



AMSTERDAM,

C. G. VANDER POST.

1858.

OVER EENIGE GEVALLEN
BIJ DE
THEORIE
VAN
ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN.

WAAR MEN TE ONDERSCHIEDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE
VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN' GEHEELEN OF
GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Onder de moeilijkheden in de theorie der bepaalde integralen behoort voorzeker de overgang van het eindige tot het oneindige, en talrijk zijn dan ook de dwalingen, die ontstaan zijn uit het niet behoortlijk letten op de voorzigtigheidsmaatregelen, die hierbij zijn in acht te nemen. Deze overgang kan van tweederlei aard zijn: óf het kan gebeuren, dat eene der beide grenzen van de bepaalde integraal het oneindige tot limiet heeft, óf dit kan het geval zijn met eene standvastige, voorkomende in de functie, die te integreren is. Van elk dezer beide gevallen is het mijn voornemen thans eenige bijzondere voorbeelden te behandelen, en wel zulke, die eensdeels van veel gewigt zijn in de theorie zelve, en ten anderen tot zeer verschillende verklaring en behandeling hebben aanleiding gegeven; deze kunnen niet allen den toets van eene meer bijzondere, strenge overweging doorstaan, en hebben daarom ook tot niet altijd zuivere uitkomsten geleid. Het geldt hier namelijk, hoe vreemd zulks ook in het eerst klinken moge, het onderscheid, dat er somtijds gemaakt moet worden tusschen even en oneven, tusschen geheel en gebroken oneindig

1

groot; een onderscheid dat meermalen verkeerdelijk over het hoofd werd gezien.

Wanneer men toch eene bepaalde integraal-formule gevonden heeft voor zekere waarden van eene standvastige grootheid h , namelijk $2k$, $2k+1$, ak , pk , (waar a een geheel getal en p een gebroken moet voorstellen) kan het dikwerf voorkomen, dat de gang der redenering juist steunt op dezen bijzonderen overeenkomstigen vorm der standvastige, bijv. het even of oneven zijn, het geheel of gebroken zijn daarvan: is dit het geval, en laat men h tot oneindig aangroeijen, dan gelden de uitkomsten, die alsdan ontstaan, niet algemeen voor $h = \infty$, maar respectivelijk slechts voor $h=2k$, $=2k+1$, $=ak$, $=pk$, met de voorwaarde $k = \infty$.

Mit dit oogpunt nu zullen hier vooreerst te behandelen zijn de integralen van den vorm:

$$\int_a^b \sin. kx.f(x) dx \text{ of } \int_a^b \cos. kx.f(x) dx. (\text{Lim. } k = \infty)$$

Het eerst, ongeveer een vierde eeuw geleden, zijn zulke integralen beschouwd door LEJEUNE-DIRICHLET en wel in CRELLE's *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 4, S. 157: sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

Hij onderscheidde echter teregt, waar het hier juist op aankwam, namelijk het geval, dat h den vorm $2k+1$ bezat en dus oneven was, ook voor $k = \infty$. Zijne opvolgers echter zagen dit bij soortgelijke bespiegelingen dikwerf over het hoofd en genaakten daardoor somtijds tot valsche uitkomsten. Dit onderzoek zal, naar ik meen, tot eenige belangrijke gevolgtrekkingen aanleiding geven.

Vervolgens zullen de integralen van den vorm

$$\int_0^\infty q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x).f(x) dx$$

worden nagegaan. Deze integralen zijn van oudere herkomst, en zijn zoowel de aanleiding tot, als het gevolg van zeer verschillende en uiteenlopende, ja zelfs tegenstrijdige, beschouwingen geweest; in lateren tijd heeft vooral RAABE zich veel daarmede bezig gehouden; mijns inziens zijn evenwel somtijds deze uitkomsten, behalve om andere redenen, ook nog daarom niet geldig, omdat de integraal alsdan eigenlijk slechts bestaat onder dezen of dergelijken vorm

$$\int_0^{2\pi k} q (\sin. \alpha x, \cos. \beta x) f(x) dx. (\text{Lim. } k = \infty)$$

zoodat hier de bovenste grens ∞ van den bijzonderen vorm $2\pi k$ bijv. zijn moet. De aldus verkregen uitkomsten zullen op die wijze somtijds van de gewone, als waar aangenomene, moeten verschillen.

Ik geloof, dat deze beide punten van genoeg belang zijn, dat de opzettelijke behandeling daarvan niet ongeschikt of onnut wezen zal.

$$1. \text{ OVER DE INTEGRALEN } \int_a^b \sin. kx \cdot f(x) dx, \int_a^b \cos. kx \cdot f(x) dx. (\text{Lim. } k = \infty) *$$

2. Men kan bij deze beschouwing van verschillende integralen uitgaan, wanneer men voor $f(x)$ bijv. schrijft $\frac{1}{x} f(x)$, $\frac{1}{\sin. x} f(x)$ enz. Het meest geschikt schijnt daaronder evenwel de afleiding te zijn uit de bepaalde Integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx, \text{ Lim. } k = \infty;$$

niet alleen, omdat men bij de FOURIER'sche Integralen regtstreeks tot deze formules wordt gebragt, maar ook en vooral omdat zich langs dien weg op de meest leerrijke manier telkens de verschillende gevallen opdoen, die bij enkele bijzondere omstandigheden moeten onderscheiden worden.

Ten einde deze integraal na te gaan, kan men gevoegelijk, naar den aard der functie $\sin. kx$, drie bijzondere gevallen onderscheiden ten opzichte van a , dat is $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$; en heeft men dus ten eerste:

* Men kan de vroegere beschouwingen, — die echter niet alle met de hier ontwikkelde overeenstemmen, — vooral vinden in de volgende verhandelingen:

LEJEUNE-DIRICHLET, *Journal von Crelle*, Bd. 4. S. 157. — Dezelfde, *Repertorium der Physik*, von Dove und Moser, Bd. 1. S. 152. — Dezelfde, *Journal von Crelle*, Bd. 17. S. 57. — Dezelfde, *Abhandl. Akad. Berlin* 1835.

SCHLÖMILCH, *Gruner's Archiv*, Bd. 1. S. 417. — Dezelfde, *Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale*, Jena, Frommann, 1843. VIII. 103 S. 4^e. Abth. I. — Dezelfde, *Analytische Studien*, 2^{te} Abth. Leipzig, Engelmann, 1848. 198 S. 8^e.

MEIJER, *Journal von Crelle*, Bd. 43. S. 60.

BONNET, *Journal de Liouville*, T. 14. p. 240.

$$I_1 = \int_0^{1\pi} \frac{\sin kx}{x} f(x) dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Stel hierin $kx = y$ met de grenzen 0 en $\frac{1}{2}k\pi$ voor y , zoo wordt

$$I_1 = \int_0^{1\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2}k\pi$ kan men nu in k deelen verdeelen, die elk $\frac{1}{2}\pi$ bevatten, namelijk 0 tot $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ tot π , π tot $\frac{3}{2}\pi$, $\dots$ $\frac{k-1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}k\pi$; en dan de integraal zelve door eene som van k andere vervangen, die de genoemde deelen tot grensafstanden hebben, zoodat men verkrijgt:

$$I_1 = \int_0^{1\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\pi}^{1\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \dots + \int_{(c-1)\pi}^{c\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy \dots + \int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{1\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots \dots (a)$$

Deze k integralen zijn ten opzichte der grenzen van tweederlei vorm, naarmate de integratie van de grens $(c-\frac{1}{2})\pi$ tot $c\pi$ of van $c\pi$ tot $(c+\frac{1}{2})\pi$ moet plaats hebben. Men kan nu al deze integralen tot andere terug brengen, die 0 en $\frac{1}{2}\pi$ tot grenzen hebben; daartoe stelde men in het algemeen, als de grenzen van y zijn

$$(c-\frac{1}{2})\pi \text{ en } c\pi: y = c\pi - x, dy = -dx, \text{ met } \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \text{ als grenzen van } x \dots \dots (b)$$

$$c\pi \text{ en } (c+\frac{1}{2})\pi: y = c\pi + x, dy = dx, \text{ met } 0 \text{ en } \frac{1}{2}\pi \text{ als grenzen van } x \dots \dots (b)$$

en dan verkrijgt men voor de beide bedoelde integralen, daar

$$\sin(c\pi \pm x) = \sin c\pi \cos x \pm \cos c\pi \sin x = \pm \cos c\pi \sin x \dots \dots (c)$$

is,

$$\int_{(c-1)\pi}^{c\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = - \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \frac{\sin(c\pi - x)}{c\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) dx = - \cos c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{c\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) dx,$$

$$\int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(c\pi + x)}{c\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) dx = \cos c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{c\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) dx.$$

Door de toepassing dezer herleidingsformulen worden nu alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (a) voorkomen, tot andere terug gebracht,

die 0 en $\frac{1}{2}\pi$ tot grenzen hebben; men kan dus al deze integralen onder één integraalteeken vereenigen, dat is:

$$I_1 = \int_0^{1\pi} \left[\frac{\sin x}{x} f\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{\sin x}{\pi-x} f\left(\frac{\pi-x}{k}\right) - \frac{\sin x}{\pi+x} f\left(\frac{\pi+x}{k}\right) - \frac{\sin x}{2\pi-x} f\left(\frac{2\pi-x}{k}\right) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{\sin x}{k\pi+x} f\left(\frac{k\pi+x}{k}\right) \right] dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Nu kan men tot den limiet van $k = \infty$ overgaan; vooreerst is alsdan de reeks onder het integraalteeken eene oneindige; voorts wordt voor elke $f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right)$

$$\text{Lim. } f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right) = f\left(\frac{c\pi \pm x}{\infty}\right) = f(0) \dots \dots \dots (d)$$

wanneer althans de functie $f(x)$ tusschen de grenzen der integratie 0 en $\frac{1}{2}\pi$ stadig is *.

Men kan dus deze $f(0)$ even als $\sin x$, als gemeenschappelijke factoren onder het integraalteeken afzonderen, waardoor

$$I_1 = \int_0^{1\pi} f(0) \sin x dx \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi-x} - \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{3\pi-x} - \dots \right]$$

wordt; maar in het algemeen is $\frac{1}{c\pi-x} - \frac{1}{c\pi+x} = \frac{2x}{c^2\pi^2 - x^2}$, dus wederom den standvastigen factor $f(0)$ buiten het integraalteeken brengende,

$$I_1 = f(0) \int_0^{1\pi} \sin x dx \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \dots \right]$$

Nu weet men dat voor $x < \pi$, (en dit is hier het geval, daar $\frac{1}{2}\pi$ de bovenste grens van x is) de reeks onder het integraalteeken convergeert en *Cosec. x* tot waarde heeft; daardoor wordt eindelijk

$$I_1 = f(0) \int_0^{1\pi} \sin x dx \cdot \text{Cosec. } x = f(0) \int_0^{1\pi} dx = \frac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is:

$$\int_0^{1\pi} \frac{\sin kx}{x} f(x) dx = \frac{1}{2}\pi f(0). \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots \dots (I)$$

* Het woord *stadig* wordt hier gebruikt ter vervanging van het fransche *continuë*, even als *onstadig* voor *discontinûë* staat.

Vervolgens zij

$$I_1 = \int_0^a \frac{\sin kx}{x} f(x) dx, \quad 0 < a < \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

zoo heeft men wederom, even als boven $kx = y$ stellende,

$$I_1 = \int_0^a \frac{\sin kx}{x} f(x) dx = \int_0^{ak} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Stel nu dat het grootste veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$, dat in ak begrepen is, $m \cdot \frac{1}{2}\pi$ zij, en f (die dus kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is) de rest, zoodat $ak = m \cdot \frac{1}{2}\pi + f$ is, — dan zal hierbij m , hoezeer kleiner dan k , (daar a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is ondersteld) toch met k moeten aangroeijen en daarmede ∞ tot limiet hebben. Verdeelt men nu den grensafstand a tot ak in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}m\pi$ en $\frac{1}{2}m\pi$ tot $\frac{1}{2}m\pi + f$, zoo wordt

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}m\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (\text{Lim. } k = \infty, \text{ Lim. } m = \infty)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijking heeft, even als bij de formule (I) $\frac{1}{2}\pi f(0)$ tot waarde: de tweede integraal kan men tot eenen meer geschikten vorm terug brengen door de onderstelling $y = \frac{1}{2}m\pi + x$; alsdan wordt $dy = dx$ en de grenzen voor de nieuwe veranderlijke x worden 0 en f ; daardoor wordt dus die integraal

$$\int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^f \frac{\sin(\frac{1}{2}m\pi + x)}{\frac{1}{2}m\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}m\pi + x}{k}\right) dx;$$

en derhalve

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi f(0) + \int_0^f \frac{\sin(\frac{1}{2}m\pi + x)}{\frac{1}{2}m\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}m\pi + x}{k}\right) dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty, \text{ Lim. } m = \infty)$$

Maar in de laatste integraal is $\sin(\frac{1}{2}m\pi + x)$ ook voor $m = \infty$ steeds kleiner dan de eenheid; $f\left(\frac{\frac{1}{2}m\pi + x}{k}\right)$ wordt $f\left(\frac{\frac{1}{2}m\pi}{k}\right) = f(a)$; de noemer $\frac{1}{2}m\pi + x$ wordt oneindig, en daarmede vervalt de geheele functie onder het integraalteeken, zoodat die integraal zelve nul wordt. Men heeft dus ook hier

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is

$$\int_0^a \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi f(0), \quad 0 < a < \frac{1}{2} \pi. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots (II)$$

Eindelijk zij

$$I_3 = \int_0^a \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx, \quad \frac{1}{2} \pi < a < \infty, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

zoo wordt

$$I_3 = \int_0^{ak} \frac{\sin. y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy,$$

als men hier wederom $y = kx$ stelt. Deze vorm is volkomen dezelfde als die voor I_2 verkregen: slechts is hier a grooter dan $\frac{1}{2} \pi$, en wordt dus bij herhaling der vorige redenering m grooter dan k ; maar dit is dan ook het eenige verschil en de slotsom blijft dezelfde, dat is

$$\int_0^a \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi f(0), \quad \frac{1}{2} \pi < a < \infty. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots (III)$$

Wanneer men nu, hetgeen in de vergelijkingen (I), (II) en (III) gevonden is, te zamentrekt, komt men tot de algemeene uitkomst:

$$\int_0^a \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi f(0), \quad 0 < a < \infty. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots (IV)$$

Op dezelfde wijze is evenzeer

$$\int_0^b \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi f(0), \quad 0 < b < \infty, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

en derhalve, wanneer men de laatste integraal van de integraal (IV) aftrekt,

$$\int_0^a \frac{\sin. kx}{x} f(x) dx = 0, \quad 0 < b < a < \infty. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots (V)$$

Hierbij wordt telkens ondersteld dat de functie $f(x)$ stadig zij tusschen de grenzen der integratie.

Bij deze integralen ziet men dat de standvastige k , die het oneindige tot limiet heeft, geheel willekeurig in vorm is, zoodat hier de vroeger gemaakte aanmerking niet te pas komt.

3. Voor de bepaalde integraal

$$\int_0^a \frac{\cos. kx}{x} f(x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

moet men evenzeer als bij de vorige de drie gevallen onderscheiden, dat $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$ is.

Is $a = \frac{1}{2}\pi$, dan stelle men weder $kx = y$, met 0 en $\frac{1}{2}k\pi$ als grenzen voor y , en dan wordt:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos. kx}{x} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos. y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2}k\pi$ verdeele men in k deelen, zoodat men eene dergelijke vergelijking (a) verkrijgt als in N°. 2, waarin slechts $\cos. y$ voor $\sin. y$ komt te staan: men gebruike dezelfde substitutie (b), $y = c\pi \pm x$, dan verkrijgt men hier, — daar

$$\cos.(c\pi \pm x) = \cos.c\pi. \cos.cx \mp \sin.c\pi. \sin.x = \cos.c\pi. \cos.x$$

is, — wanneer men nog alle integralen, die nu dezelfde grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ hebben verkregen, onder hetzelfde integraalteeken vereenigt:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{\cos.x}{x} f\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{\cos.x}{\pi-x} f\left(\frac{\pi-x}{k}\right) - \frac{\cos.x}{\pi+x} f\left(\frac{\pi+x}{k}\right) + \frac{\cos.x}{2\pi-x} f\left(\frac{2\pi-x}{k}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\cos.x}{2\pi+x} f\left(\frac{2\pi+x}{k}\right) - \dots + (-1)^k \frac{\cos.x}{k\pi+x} f\left(\frac{k\pi+x}{k}\right) \right] dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Stel hierin $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}y$, waardoor de grenzen van y worden π en 0, terwijl

$dy = -dx$ is, zoo wordt:

$$I_1 = \int_{\pi}^0 -dy \left[\frac{\sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{\sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{\sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) + \frac{\sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \dots + (-1)^k \frac{\sin.\frac{1}{2}y}{(\frac{k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}y)} f\left(\frac{(\frac{k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}y)}{k}\right) \right]. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Hierin tot de limiet ∞ van k overgaande, wordt dadelijk de reeks eene oneindige en tevens

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{k}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{\infty}\right) = f(0) \dots \dots \dots (f)$$

Derhalve wordt $f(0)$ wederom een standvastige factor, die nu buiten het integraalteeken kan vallen; evenzoo wordt $\text{Sin. } \frac{1}{2}y$ een factor, die echter onder het integraalteeken moet blijven; daardoor wordt

$$I_1 = f(0) \int_0^\pi \text{Sin. } \frac{1}{2}y dy \left[\frac{2}{\pi - y} - \frac{2}{\pi + y} - \frac{2}{3\pi - y} + \frac{2}{3\pi + y} + \frac{2}{5\pi - y} - \dots \right]$$

$$= f(0) \int_0^\pi \text{Sin. } \frac{1}{2}y dy \left[\frac{4y}{\pi^2 - y^2} - \frac{4y}{9\pi^2 - y^2} + \frac{4y}{25\pi^2 - y^2} - \dots \right], \text{ (Lim. } k = \infty \text{),}$$

wanneer men in de reeks onder het integraalteeken elke twee opvolgende termen optelt, die $c\pi \pm y$ tot noemers hebben. Nu heeft, tusschen de hier geldende grenzen, de laatst verkregen reeks onder het integraalteeken $\frac{\pi}{y} \text{Sec. } \frac{1}{2}y$ tot waarde; van daar is

$$I_1 = f(0) \int_0^\pi \text{Sin. } \frac{1}{2}y dy \frac{\pi}{y} \text{Sec. } \frac{1}{2}y = \pi f(0) \int_0^\pi \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}y dy}{y}, \text{ (Lim. } k = \infty \text{),}$$

of $x = \frac{1}{2}y$ stellende, waardoor de grenzen van x worden 0 en $\frac{1}{2}\pi$,

$$I_1 = \pi f(0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{Tang. } x dx}{x}, \text{ (Lim. } k = \infty \text{).}$$

Maar het is gemakkelijk in te zien, dat deze integraal eene oneindige waarde heeft; want wanneer men ze, volgens de oorspronkelijke bepaling eener bepaalde integraal, als eene oneindige som van oneindig kleine producten beschouwt, zoo wordt voor de bovenste grens $\frac{1}{2}\pi$ de geïntegreerde functie $\frac{\text{Tang. } x}{x}$ hier $\frac{\text{Tang.}(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta}$ en heeft dus oneindig tot limiet: het product

$$\delta \cdot \frac{\text{Tang.}(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta} \text{ wordt } \frac{1}{\frac{1}{2}\pi - \delta} \frac{\delta}{\text{Cot.}(\frac{1}{2}\pi - \delta)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi - \delta} - \frac{1}{\text{Coec.}^2(\frac{1}{2}\pi - \delta)} =$$

$$= -\frac{\text{Sin.}^2(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{2}{\pi}, \text{ niet meer oneindig klein; zoodat de be-}$$

doelde integraal oneindig groot wordt. Daardoor heeft men

$$I_1 = \infty \cdot \pi f(0), \text{ (Lim. } k = \infty \text{).}$$

Deze waarde is in het algemeen oneindig, zoo lang $f(x)$ stadig blijft tus-

schen de grenzen van het integreren. Wordt $f(0)$ nul, dan wordt de waarde van I_1 onbepaald, en kan op deze wijze niet nader worden gevonden. Verder is het duidelijk, in verband met hetgeen in N°. 2 werd aangemerkt, dat ook voor andere waarden van de bovenste grens der integratie a , namelijk voor $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$, de integraal dezelfde waarde behoudt; men mag dus tot de algemeene formule besluiten

$$\int_0^a \frac{\cos. kx}{x} f(x) dx = \infty. \pi f(0); \quad (\text{Lim. } k = \infty). \dots \dots \dots (VI)$$

en hierin is de waarde onbepaald of oneindig, naarmate $f(0)$ nul is of niet. Ook hier wordt de functie stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

4. Men kan nu overgaan om voor $f(x)$ bijzondere waarden in de plaats te stellen, die nu aan de gegevene voorwaarde moeten voldoen. Het eerst doet zich de onderstelling voor $f(x) = x F(x)$: dan geven de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) bij stadigheid der functie $F(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \sin. kx. F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [x F(x)]_{x=0} = \frac{\pi}{2} 0. f(0) = 0 \\ \int_0^a \cos. kx. F(x) dx &= \infty. \pi [x F(x)]_{x=0} = \infty. \pi. 0. f(0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots (g)$$

Deze laatste nu is onbepaald; ten einde daaromtrent, zoowel als ten opzichte der eerste, eenige meerdere bijzonderheden te leeren kennen, beschouwe men ze op zich zelve, bijv. de laatste, en stelle deze daartoe onder den vorm

$$I_3 = \int_b^a \cos. kx. F(x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Hierin zij nu $kx = y$, waardoor bk en ak de grenzen van y worden; men zoek het laagste veelvoud van π , stel $p\pi$, grooter dan bk , en evenzoo het hoogste veelvoud van π , stel $q\pi$, kleiner dan ak ; en noeme de beide resten r en s , (die dus beide kleiner dan π moeten zijn), dat is:

$$bk = p\pi - r, \quad r < \pi; \quad ak = q\pi + s, \quad s < \pi.$$

Alsdan verdeele men den grensafstand bk tot ak in drie deelen, namelijk van $p\pi - r$ tot $p\pi$, van $p\pi$ tot $q\pi$, van $q\pi$ tot $q\pi + s$, waardoor alzoo

$$I_3 = \int_b^a \cos. kx. F(x) dx = \int_{p\pi-r}^{p\pi} \frac{1}{k} \cos. x. F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} \cos. x. F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_{q\pi}^{q\pi+s} \frac{1}{k} \cos. x. F\left(\frac{x}{k}\right) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty). (i)$$

Stel in de eerste der integralen, die in het laatste lid dezer vergelijking voorkomen, $x = p\pi - y$, zoodat $\cos x = \cos p\pi \cos y + \sin p\pi \sin y = \cos p\pi \cos y$, $dx = -dy$ is, terwijl r en 0 de grenzen van y worden. Evenzoo moet men in de laatste der integralen $x = q\pi + y$ stellen, zoodat $dx = dy$ en $\cos x = \cos q\pi \cos y$ wordt, met de grenzen 0 en s voor y . Op de onderstelling $p\pi = bk + r$, $q\pi = ak - s$ lettende, heeft men alzoo

$$I_2 = \int_r^{01} \frac{1}{k} \cos p\pi \cos y \cdot F\left(\frac{p\pi - y}{k}\right) (-dy) + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} \cos x \cdot F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_0^s \frac{1}{k} \cos q\pi \cos y \cdot F\left(\frac{q\pi + y}{k}\right) dy$$

$$= \cos p\pi \cdot \int_0^r \frac{1}{k} \cos y \cdot F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) dy + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} \cos x \cdot F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \cos q\pi \cdot \int_0^s \frac{1}{k} \cos y \cdot F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right) dy, (\text{Lim. } k = \infty) \cdot (k)$$

Is nu $f(x)$ tusschen de grenzen a en b stadig, zoo blijkt reeds uit de vorige vergelijking (i), zoowel als uit de laatste, dat iedere integraal in het tweede lid op zich zelve nul wordt, uithoofde van den factor $\frac{1}{k}$; zoodat dan ook:

$$I_2 = \int_b^a \cos kx \cdot F(x) dx = 0 \quad (\text{Lim. } k = \infty) \quad \dots \dots \dots (VII)$$

Maar de vergelijking (k) leert ons meer. Want indien slechts $\text{Lim. } \delta F(b + \delta)$ nul is (voor $\text{Lim. } \delta = 0$), waarbij toch $F(b + \delta)$ zelve oneindig kan zijn en er dus stadigheid bij de grens b kan plaats hebben, zoo is voor $\delta = \frac{r-y}{k}$:

$$\text{Lim. } \delta F(b + \delta) = \text{Lim. } \frac{r-y}{k} F\left(b + \frac{r-y}{k}\right) = \text{Lim. } \frac{r-y}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0,$$

$$\text{dus} \quad \text{Lim. } \frac{1}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0, (\text{Lim. } k = \infty),$$

daar r — als grens der overeenkomstige eerste integraal in het tweede lid van (k) — grooter dan y en toch kleiner dan π zijde, (zie verg. (h)) $r - y$ een positief eindig getal is; die integraal wordt dus ook in dit geval nul. Indien ook evenzeer $\text{Lim. } \delta f(a - \delta) = 0$ is (voor $\text{Lim. } \delta = 0$), waarbij ook $F(a - \delta)$ wederom op zich zelve oneindig kan zijn, wanneer de onstadigheid voor de bovenste grens a plaats grijpt, zoo is voor $\delta = \frac{s-y}{k}$:

$$\text{Lim. } \delta F(a - \delta) = \text{Lim. } \frac{s-y}{k} F\left(a - \frac{s-y}{k}\right) = \text{Lim. } \frac{s-y}{k} F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right) = 0,$$

dus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} F\left(\frac{ak-s+y}{k}\right) = 0, \quad (\lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty)$$

daar bij de laatste integraal in de formule (k) s als grens der y grooter dan elke y is en toch kleiner dan π moet blijven (zie verg. (4)), zoodat $s-y$ een eindig positief getal is. — De integraal zelve is dus ook nul en in plaats van (VII) wordt hier meer algemeen volgens (k):

$$I_s = \int_0^a \cos.k.x.F(x) dx = \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx, \quad \left. \vphantom{\int_0^a} \right\} (\lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty). \quad (l)$$

als $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta F(b+\delta) = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta F(a-\delta) = 0$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta = 0$ is.

Nu verdeele men zoo als vroeger den grensafstand van $p\pi$ tot $q\pi$ in $p-q$ andere, die telkens π groot zijn, dan wordt bij de onderstellingen, waaronder (l) bestaat, en die wij gemakshalve niet telkens zullen over-schrijven:

$$I_s = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_{(p+1)\pi}^{(p+2)\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \dots + \int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \dots$$

$$\int_{(q-1)\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx \dots \dots \dots (m)$$

Stel nu in eene integraal, die $c\pi$ en $(c+1)\pi$ tot grenzen heeft, $x = c\pi + y$, dan wordt $\cos.x = \cos.c\pi \cos.y$, $dx = dy$, en de grenzen van y worden 0 en π ; zoodat die algemeene integraal wordt:

$$\int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{1}{k} \cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx = \cos.c\pi \int_0^\pi \frac{1}{k} \cos.y.F\left(\frac{c\pi+y}{k}\right) dy.$$

Bij alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (m) voorkomen, deze substitutie aanwendende, verkrijgt men voor alle integralen dezelfde grenzen 0 en π , zoodat men ze allen onder een integraalteeken vereenigen kan; daarenboven is $\frac{1}{k} \cos.y$ een factor, die aan alle integralen gemeen is. Derhalve

$$I_s = \int_0^\pi \frac{1}{k} \cos.y dy \left[F\left(\frac{p\pi+y}{k}\right) - F\left(\frac{(p+1)\pi+y}{k}\right) + \dots + \cos.\{(q-1)\pi\} F\left(\frac{(q-1)\pi+y}{k}\right) \right]. \quad (n)$$

Is nu $F(x)$ tusschen de grenzen 0 en π eene afdalende functie, zoo is de

reeks onder het integraalteeken convergent en begrepen tusschen nul en den eersten term dier reeks, dat is, voor $p\pi$ hare waarde $bk+r$ in de plaats stellende,

$$0 < I_s < \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \cos y dy F\left(\frac{bk+r+y}{k}\right) \dots\dots\dots (o)$$

Maar wegens $\lim. \delta F(b+\delta) = 0$ is ook $\lim. \frac{r+x}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$, en dus ook, daar $x < r < \pi$ is, $\lim. \frac{1}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$; derhalve $0 < I_s < 0$, dat is $I_s = 0$.

Was $F(x)$ daarentegen tusschen de grenzen 0 en π eene opklimmende functie, zoo is de reeks onder het integraalteeken nog convergent, mits men haar in omgekeerde orde neme; hare waarde is alsdan begrepen tusschen nul en den laatsten term dier reeks, zoo als zij in de vergelijking (n) geordend is; dus voor $q\pi$ hare waarde $ak-s$ stellende, wordt

$$0 < I_s < \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \cos y dy F\left(\frac{ak-s-\pi+y}{k}\right) \dots\dots\dots (p)$$

Nu is $\lim. \delta f(a-\delta) = 0$ ondersteld, dus ook $\lim. \frac{\pi+s-y}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$; maar $y < s < \pi$, dus $0 < \pi+s-y < 2\pi$ en daarom $\lim. \frac{1}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$, derhalve ook in dit geval $0 < I_s < 0$, dat is $I_s = 0$.

Was $F(x)$ verder eene functie, die dan eens opklimmend dan eens afda-
lend werd, zoude men de integratie van elk maximum tot elk volgend mini-
mum afzonderlijk moeten uitvoeren, en zoude van elke zulke integraal dus
het boven gezegde gelden. Werd $F(x)$ voor eenige dier grensafstanden nega-
tief, zoo behoefde men slechts eene nieuwe functie $F_1(x) = -F(x)$ in te
voeren, om weder de vorige redenering te doen gelden. Men heeft dus altijd

$$\left. \int_b^a \cos kx F(x) dx = 0, \right\} (\lim. k = \infty) \dots\dots (VIII)$$

als $\lim. \delta F(b+\delta) = 0$, $\lim. \delta F(a-\delta) = 0$ en $\lim. \delta = 0$ is.

wanneer de functie $F(x)$ tusschen de grenzen (uitgesloten) stadig is.

Maar ook wanneer zij voor eenige waarde van x bijv. h (zoodanig dat $b < h < a$ is) onstadig werd, is het gemakkelijk te bepalen, welken invloed dit zal uitoefenen. Men moet alsdan volgens de voorschriften van de theorie

der bepaalde integralen de, naar CAUCHY aldus genoemde, *singuliere* integraal

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{h-\epsilon}^{h+\epsilon} \text{Cos. } kx \cdot F(x) dx, \quad (\text{Lim. } \epsilon = 0),$$

van de vroegere waarde aftrekken.

Stel ook hier $kx = y$, zoo wordt die correctie

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{kh-k\epsilon}^{kh+k\epsilon} \frac{1}{k} \text{Cos. } y \cdot F\left(\frac{y}{k}\right) dy, \quad (\text{Lim. } \epsilon = 0, \text{ Lim. } k = \infty).$$

Is $k\epsilon = \infty, 0$, zoo wordt van zelf $\Delta = 0$; is dit produkt echter niet nul, zoo heeft men hier eene dergelijke formule als in vergelijking (VIII), en Δ zal dus nul zijn, mits $\text{Lim. } \delta F(h \pm \delta)$ zelve nul is. Daardoor wordt de vergelijking (VIII) eindelijk

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \text{Cos. } kx \cdot F(x) dx = 0. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \\ \text{Wordt } F(x) \text{ voor } b, a, \text{ of } h (a > h > b) \text{ onstadij, zoo moet nog res-} \\ \text{pective } \text{Lim. } \delta F(b + \delta) = 0, \text{Lim. } \delta F(a - \delta) = 0, \text{Lim. } \delta F(h \pm \delta) = 0 \\ \text{zijn voor } \text{Lim. } \delta = 0; \text{ hierbij kan } b \text{ ook nul wezen.} \end{aligned} \right\} \cdot \text{(IX)}$$

5. Men heeft dus bepaald, wat er van de onbepaalde uitkomst was, die in de laatste der vergelijkingen (g) gevonden werd. Op dezelfde wijze redenerende ten opzichte van de eerste der integralen (g) zal men die uitkomst nog eenigzins kunnen uitbreiden. En dit zal niet moeilijk zijn, wanneer men nagaat welke verandering in de formule van het vorige N°. plaats grijpt, wanneer men $\text{Sin. } kx$ voor $\text{Cos. } kx$ schrijft en evenzeer $\text{Sin. } y$ voor $\text{Cos. } y$. In vergelijking (k) zal de eerste integraal negatief worden, maar daardoor zal (VII) niet veranderen, evenmin als (l) tot (p); de vergelijkingen (VIII) en (IX) blijven dus bestaan (altijd bij het veranderen van Cos. in Sin.); dat is

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \text{Sin. } kx \cdot F(x) dx = 0. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \\ \text{Wordt } F(x) \text{ voor } b, a \text{ of } h (a > h > b) \text{ onstadij, zoo moet nog respec-} \\ \text{tive } \text{Lim. } \delta F(b + \delta) = 0, \text{Lim. } \delta F(a - \delta) = 0, \text{Lim. } \delta F(h \pm \delta) = 0 \\ \text{zijn, voor } \text{Lim. } \delta = 0. \text{ Hierin kan ook } b = 0 \text{ zijn.} \end{aligned} \right\} \cdot \text{(X)}$$

In deze vergelijkingen (I) tot (X) is de vorm van k nog geheel onbepaald.

6. Men kan in de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) voor $f(x)$ ook nog andere onderstellingen invoeren, zoodat de noemer x vervangen worde bijv. door $\text{Sin. } x$ of $\text{Cos. } x$; en dit zal tot vier verschillende formules leiden.

Zij vooreerst in (IV) $f(x) = \frac{x}{\text{Sin. } x} F(x)$, dan wordt zij

$$\int_0^a \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx = \frac{1}{2} \pi \left[\frac{x}{\text{Sin. } x} F(x) \right]_{x=0} \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Voor $x=0$ wordt wel is 'waar $\frac{x}{\text{Sin. } x} = \frac{0}{0}$ en schijnt dus onbepaald, doch uit de leer der limieten weet men dat $\text{Lim. } \frac{x}{\text{Sin. } x} = 1$ voor $\text{Lim. } x = 0$.

Maar de bovenstaande vergelijking geldt slechts, wanneer $f(x)$, dat is $\frac{x}{\text{Sin. } x} F(x)$, stadig is tusschen de grenzen 0 en a ; wanneer dit zelfde nu ook met $F(x)$ het geval moet zijn, zoo dient noodzakelijk $\frac{x}{\text{Sin. } x}$ mede stadig te wezen; deze breuk wordt onstadig voor $x = \pi$; derhalve geldt de bovenstaande vergelijking vooreerst slechts voor a kleiner dan π , dat is:

$$I_6 = \int_0^a \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx = \frac{\pi}{2} F(0). \quad a < \pi. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots (XI)$$

Er is dus eene nieuwe onderzoeking noodig, wanneer a gelijk of grooter dan π is; daartoe onderscheide men hier drie gevallen $a = \pi$, $a = b\pi$, $a = b\pi + c$, (waar $c < \pi$ zij), zoodat wij ons eerstens hebben bezig te houden met de integraal

$$I_7 = \int_0^\pi \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Men ontbinde den grensafstand 0 tot π in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ tot π ; dat is

$$I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Verder stelle men in de laatste integraal $x = \pi - y$, dus $dx = -dy$, $\text{Sin. } x = \text{Sin. } y$, $\text{Sin. } kx = -\text{Cos. } k\pi \cdot \text{Sin. } ky = \text{Cos. } ((k-1)\pi) \cdot \text{Sin. } ky$, terwijl de grenzen van y worden $\frac{1}{2}\pi$ en 0; alsdan wordt:

$$I_7 = \int_0^{4\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot \int_0^{4\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(\pi-x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Ten opzichte van beide deze integralen kan men nu de formule (XI) aanwenden, waardoor

$$I_7 = \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx = \frac{\pi}{2} F(0) + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot \frac{\pi}{2} F(\pi-0), \quad (\text{Lim. } k = \infty) \quad (\text{XII})$$

wordt. Men ziet hieruit, dat de uitkomst in zoo verre van k afhangt, dat de factor $\{\cos \{(k-1)\pi\}$ voor k even of oneven gelijk wordt aan de negatieve en positieve eenheid. Zoodra men dus weet, dat k de limiet is van eene evene of onevene grootheid, heeft men

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} \{F(0) - F(\pi)\} \\ \int_0^{\pi} \frac{\sin \{(2k-1)x\}}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} \{F(0) + F(\pi)\} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots (\text{XIII})$$

Is daarentegen de oorsprong van k niet bekend, zoodat men niet gerechtigd is, om k even of oneven aan te nemen, zoo heeft men, naarmate $F(\pi)$ altijd nul is of niet, uit de vergelijking (XII)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} F(0), \quad \text{als } F(\pi) = 0 \text{ is;} \\ &= \text{onbepaald, als } F(\pi) \text{ niet } = 0 \text{ is.} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Lim. } k = \infty) \quad (\text{XIV})$$

Vervolgens beschouwe men het geval dat $a = b\pi$ is, dat is de integraal

$$I_8 = \int_0^{b\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx; \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

hier verdeeke men den grensafstand 0 tot $b\pi$ in b deelen, die elke eenen afstand π bevatten, dan is

$$I_8 = \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \dots + \int_{(c-1)\pi}^{c\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \dots + \int_{(b-1)\pi}^{b\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots \dots \dots (g)$$

Stel in eenige dier integralen, wier grenzen in het algemeen $c\pi$ en $(c+1)\pi$ mogen zijn, $x = c\pi + y$, $dx = dy$, met de grenzen 0 en π voor y , dan is

$$\sin x = \cos c\pi \cdot \sin y,$$

$$\sin kx = \sin (kc\pi + ky) = \cos kc\pi \cdot \sin ky = \cos \{(k-1)c\pi\} \cdot \cos c\pi \cdot \sin ky,$$

Substitueert men telkens deze uitkomsten in de vergelijking (q), zoo heeft men eerst in het algemeen:

$$\int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx = \cos \{(k-1)c\pi\} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin ky}{\sin y} F(c\pi + y) dy$$

en dus wordt (q)

$$I_s = \int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} F(\pi+x) dx + \cos \{(k-1)2\pi\} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} F(2\pi+x) dx + \dots \\ + \cos \{(k-1)(b-1)\pi\} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} F\{(b-1)\pi+x\} dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

of, daar $\cos \{(k-1)2c\pi\} = 1$, $\cos \{(k-1)(2c-1)\pi\} = \cos \{(k-1)\pi\}$ is, wanneer men tevens de uitkomst van vergelijking (XII) gebruikt:

$$I_s = \frac{\pi}{2} [F(0) + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot f(\pi)] + \frac{\pi}{2} \cos \{(k-1)\pi\} \cdot [F(\pi) + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot F(2\pi)] + \\ + \frac{\pi}{2} \cos \{(k-1)2\pi\} \cdot [F(2\pi) + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot F(3\pi)] \\ + \dots + \frac{\pi}{2} \cos \{(b-1)(k-1)\pi\} \cdot [F\{(b-1)\pi\} + \cos \{(k-1)\pi\} \cdot F(b\pi)];$$

of daar $\cos \{(l(k-1)\pi\} \cdot \cos \{(k-1)\pi\} = \cos \{(l-1)(k-1)\pi\}$ is,

$$I_s = \int_0^{b\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx = \frac{\pi}{2} [F(0) + 2\cos \{(k-1)\pi\} \cdot F(\pi) + 2F(2\pi) + 2\cos \{(k-1)\pi\} \cdot F(3\pi) + \\ + \dots + 2\cos \{(b-1)(k-1)\pi\} \cdot F\{(b-1)\pi\} + \cos \{(b(k-1)\pi\} \cdot F(b\pi)] \\ = \frac{\pi}{2} [\{F(0) + 2F(2\pi) + 2F(4\pi) + \dots\} + 2\cos \{(k-1)\pi\} \cdot \{F(\pi) + F(3\pi) + \dots\} + \\ + \cos \{(b(k-1)\pi\} \cdot F(b\pi)]. \quad \text{Lim. } k = \infty \dots \dots \dots (XV)$$

Hier komt weder het onderscheid tusschen k even en oneven te pas; want de factor $\cos \{(k-1)\pi\}$ hangt daarvan af; is k even, zoo is die factor -1 , terwijl hij $+1$ wordt voor k oneven. Daarenboven wordt voor k even

$\text{Cos. } \{b(k-1)\pi\}$ gelijk ± 1 naarmate b even of oneven is, omdat daarmede tevens $b(k-1)$ even of oneven is; was k daarentegen oneven zoo is $b(k-1)$ altijd even, en dus in dat geval $\text{Cos. } \{b(k-1)\pi\}$ gelijk $+1$. Dit te zamen-vattende komt men tot de drie volgende uitkomsten:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{b\pi} \frac{\text{Sin.}\{(2k-1)x\}}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) + 2F(\pi) + 2F(2\pi) + \dots + 2F\{(b-1)\pi\} + F(b\pi)], \\ \int_0^{2b\pi} \frac{\text{Sin. } 2kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \dots - 2F\{(2b-1)\pi\} + F(2b\pi)], \\ \int_0^{(2b+1)\pi} \frac{\text{Sin. } 2kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \dots + 2F(2b\pi) - F\{(2b+1)\pi\}]. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\text{Lim. } k = \infty) \\ \dots (XVI) \end{aligned}$$

Weet men daarentegen niet of k even, dan wel oneven zij, zoo wordt de uitkomst van vergelijking (XV) eene onbepaalde, tenzij altijd $F\{(2h+1)\pi\} = 0$ is (voor $2h+1 < b$); men moet dan nog onderscheiden of b even zij of niet wegens den laatsten term van (XV) namelijk $\text{Cos. } \{b(k-1)\pi\} \cdot F(b\pi)$. Is b toch even, zoo wordt $\text{Cos. } \{b(k-1)\pi\} = +1$; is b oneven, zoo wordt die factor wel onbepaald (dat is ± 1), maar $F(b\pi)$ verdwijnt alsdan. Daardoor is:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2b\pi} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) + 2F(2\pi) + \dots + 2F\{(2b-2)\pi\} + F(2b\pi)], \\ \int_0^{(2b+1)\pi} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) + 2F(2\pi) + \dots + 2F(2b\pi)], \\ \text{als } F\{(2h+1)\pi\} &= 0, \quad h \leq b; \text{ anders is } \dots (XVII) \\ \int_0^{b\pi} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx &= \text{onbepaald, als niet altijd } F\{(2h+1)\pi\} = 0 \text{ is. } (2h+1 < b). \end{aligned} \right\}$$

Eindelijk blijft er nog het geval over, dat $a = b\pi + c$ is ($c < \pi$); alsdan kan men den grensafstand 0 tot $b\pi + c$ gevoegelijk in twee deelen verdeelen, namelijk van 0 tot $b\pi$ en van $b\pi$ tot $b\pi + c$, dat is:

$$I_0 = \int_0^{b\pi+c} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx = \int_0^{b\pi} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx + \int_{b\pi}^{b\pi+c} \frac{\text{Sin. } kx}{\text{Sin. } x} F(x) dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

Stel in de laatste integraal dezer vergelijking $x = b\pi + y$, dan worden

o en c de grenzen van y; verder is $dx = dy$, $\frac{\sin kx}{\sin x} = \frac{\sin \{kb\pi + ky\}}{\sin (b\pi + y)} = \frac{\cos kb\pi \sin ky}{\cos b\pi \sin y}$
 $= \frac{\cos k b \pi \sin k y \cos b \pi}{\cos^2 b \pi \sin y} = \frac{\cos \{ (k-1) b \pi \} \sin k y}{\sin y}$; dit alles substituerende komt er:

$$I_9 = \int_0^{b\pi+c} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx + \cos \{ (k-1) b \pi \} \cdot \int_0^c \frac{\sin kx}{\sin x} F(b\pi + x) dx \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

En nu zijn de beide integralen tot eenen vorm terug gebragt, waarin reeds vroeger bepaald zijn, namelijk de eerste door de formules (XV), (XVI), (XVII) en de tweede door de formule (XI); men moet dus ook hier een onderscheid maken tusschen de verschillende gevallen, die in de vergelijkingen (XVI) en (XVII) voorkomen, en heeft alzoo:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{b\pi+c} \frac{\sin \{(2k+1)x\}}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(o) + 2F(\pi) + 2F(2\pi) + \dots + 2F(b\pi)], \\ \int_0^{2b\pi+c} \frac{\sin 2kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \dots + 2F(2b\pi)], \\ \int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{\sin 2kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \dots - 2F\{(2b+1)\pi\}], \\ \int_0^{2b\pi+c} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(o) + 2F(2\pi) + \dots + 2F(2b\pi)], \\ \int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(o) + 2F(2\pi) + \dots + 2F(2b\pi)], \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\text{Lim. } k = \infty) \\ &\dots (XVIII) \end{aligned}$$

De beide laatste integralen gelden, wanneer altijd $F\{(2h+1)\pi\} = 0$ is, voor $h \leq b$; anders is:

$$\int_0^{b\pi+c} \frac{\sin kx}{\sin x} F(x) dx = \text{onbepaald, indien niet altijd } F\{(2h+1)\pi\} = 0$$

is. $(2h+1 \leq b)$.

En hiermede is de integraal voor alle gevallen overwogen, waarbij gebleken is, welken invloed het even of oneven zijn van k uitoefent, en hoe daarbij nog de toestand der grenzen in aanmerking moet genomen worden. Om te zien of het geval van $a = \infty$ zich uit het vorige laat afleiden, dient men zich tot de vergelijkingen (XVIII) te wenden, waar a den vorm $b\pi + c$ heeft;

men moet dan daarin b tot oneindig laten aangroeijen; men kan alsdan geen onderscheid meer maken tusschen b even of oneven, en dit behoeft hier ook niet, daar de tweede en derde, evenzoo de vierde en vijfde der vergelijkingen (XVIII) telkens tot dezelfde uitkomsten leiden, als b oneindig wordt; men heeft dus eindelijk:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin. \{(2k+1)x\}}{\sin. x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) + 2F(\pi) + 2F(2\pi) + \dots], \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin. 2kx}{\sin. x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \dots], \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin. kx}{\sin. x} F(x) dx &= \frac{\pi}{2} [F(0) + 2F(2\pi) + 2F(4\pi) + \dots]; \text{ wanneer steeds} \\ & F\{(2h+1)\pi\} = 0 \text{ is, } (0 < h < \infty), \text{ anders is die integraal} \\ & = \infty. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (\text{Lim. } k = \infty) \\ & \dots \text{ (XIX)} \end{aligned}$$

Bij alle de vergelijkingen (XI) tot (XIX) wordt ondersteld, dat $F(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie.

7. Verder in de algemeene vergelijking (VI) $f(x) = \frac{x}{\cos. x} F(x)$ stellende, heeft men de integraal

$$\int_0^a \frac{\cos. kx}{\cos. x} F(x) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

te beschouwen. Deze kan men geschiktelijk afleiden uit de integraal in het vorige nummer behandeld; en wel door het stellen van $x = \frac{\pi}{2} + y$; dan is $dx = dy$, met $-\frac{\pi}{2}$ en $a - \frac{\pi}{2}$ als grenzen van y ; verder is $\cos. x = -\sin. y$, $\cos. kx = \cos. (\frac{1}{2}k\pi + ky)$. En hierin zullen de uitkomsten geheel verschillende vormen verkrijgen, naarmate k is van den vorm $4k'$, $4k'+1$, $4k'+2$, $4k'+3$ respectievelijk, want voor

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ k = 4k', \text{ is } \cos. (\tfrac{1}{2}k\pi + ky) &= \cos. \{2k'\pi + 4k'y\} &= \cos. 4k'y \\ 2^\circ k = 4k' + 1, &= \cos. \{2k'\pi + \tfrac{1}{2}\pi + (4k'+1)y\} &= -\sin. \{(4k'+1)y\}, \\ 3^\circ k = 4k' + 2, &= \cos. \{(2k'+1)\pi + (4k'+2)y\} &= -\cos. \{(4k'+2)y\}, \\ 4^\circ k = 4k' + 3 = 4k' - 1 &= \cos. \{2k'\pi - \tfrac{1}{2}\pi + (4k'-1)y\} &= \sin. \{(4k'-1)y\}. \end{aligned} \right\} (r)$$

Bij de tweede en vierde onderstelling wordt de integraal van denzelfden

vorm, als in N°. 6 behandeld is: bij de eerste en derde onderstelling daarentegen komt er eene *Cosinus* in den teller; men zal dus beide soort van vormen afzonderlijk moeten nagaan, en daartoe met de tweede en vierde der onderstellingen (*r*) moeten aanvangen. Alsdan is

$$\begin{aligned} I_{1,0} &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos. \{(4k+1)x\}}{\cos. x} F(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k+1)y\}}{-\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy \\ &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k+1)y\}}{\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin. \{(4k+1)y\}}{\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy, \\ I_{1,1} &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos. \{(4k-1)x\}}{\cos. x} F(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k-1)y\}}{-\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy \\ &= - \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k-1)y\}}{\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin. \{(4k-1)y\}}{\sin. y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right) dy. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\text{Lim. } k = \infty)$$

Stelt men in de laatste integralen dezer beide vergelijkingen, $y = -x$, $dy = -dx$, met $\frac{1}{2}\pi$ en 0 als grenzen van x , zoo worden zij:

$$\begin{aligned} I_{1,0} &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k+1)x\}}{\sin. x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin. \{(4k+1)x\}}{\sin. x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx, \\ I_{1,1} &= - \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin. \{(4k-1)x\}}{\sin. x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right) dx - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin. \{(4k-1)x\}}{\sin. x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx; \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (s)$$

en nu kan men beide laatste integralen uitdrukken door $\frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ volgens de waarde in vergelijking (XI) gevonden. Wat de eerste integralen betreft, moet vooreerst $a - \frac{\pi}{2}$ positief zijn; ten einde vervolgens tot de verschillende gevallen van het vorige nummer te komen, stelle men:

$$\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}, \quad a = \frac{3\pi}{2}, \quad a = \frac{2b+1}{2}\pi, \quad a = \frac{2b+1}{2}\pi + e, \quad a = \infty;$$

want dan wordt de bovenste grens der integratie respectie:

$$0 < a - \frac{\pi}{2} < \pi, \quad a - \frac{\pi}{2} = \pi, \quad a - \frac{\pi}{2} = b\pi, \quad a - \frac{\pi}{2} = b\pi + e, \quad a - \frac{\pi}{2} = \infty;$$

en men heeft dus naar de vergelijkingen (XI), (XIII, 2), (XVI, 1), (XVIII, 1), (XIX, 1), die hier alleen gebruikt kunnen worden omdat $4k+1$ en $4k-1$ oneven zijn, — wanneer men de beide integralen I_{10} en I_{11} onder éénen vorm met het teeken $\pm$ vereenigt:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx &= \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}; \\ \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx &= \pm \frac{\pi}{2} F\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \left[2 F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right], \\ \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx &= \pm \frac{\pi}{2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + 2 F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right. \\ &\quad \left. + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{Lim. } k = \infty) \\ &= \pm \frac{\pi}{2} \left[2 F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + 2 F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right], \quad \dots \dots (XX) \\ \int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi + \epsilon} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx &= \pm \frac{\pi}{2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + 2 F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pm \pi \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right], \\ \int_0^\infty \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx &= \pm \frac{\pi}{2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots\right] \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pm \pi \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots\right]. \end{aligned} \right\}$$

Er blijft nog een geval over, wanneer namelijk $a = \frac{1}{2}\pi$ is; alsdan $a - \frac{1}{2}\pi = 0$, en verdwijnen dus de eerste integralen in de vergelijkingen (s), zoodat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{Lim. } k = \infty). \quad \dots \dots (XXI)$$

Wat de beide andere onderstellingen aanbelangt, deze voeren tot integralen van den vorm

$$\int_0^a \frac{\cos kx}{\sin x} F(x) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

die eerst naderhand zullen worden behandeld; men moet hier dus anders te werk gaan. Uit de goniometrische vergelijkingen

$$\begin{aligned}\cos. 4kx &= \cos. \{(4k+1)x\} \cdot \cos. x + \sin. \{(4k+1)x\} \cdot \sin. x, \\ \cos. \{(4k+2)x\} &= \cos. \{(4k+1)x\} \cdot \cos. x - \sin. \{(4k+1)x\} \cdot \sin. x,\end{aligned}$$

volgt vooreerst

$$\begin{aligned}I_{1,2} &= \int_0^a \frac{\cos. 4kx}{\cos. x} F(x) dx = \int_0^a \cos. \{(4k+1)x\} \cdot F(x) dx + \\ &\quad + \int_0^a \frac{\sin. \{(4k+1)x\}}{\cos. x} \sin. x \cdot F(x) dx, \\ I_{1,3} &= \int_0^a \frac{\cos. \{(4k+2)x\}}{\cos. x} F(x) dx = \int_0^a \cos. \{(4k+1)x\} \cdot F(x) dx - \\ &\quad - \int_0^a \frac{\sin. \{(4k+1)x\}}{\cos. x} \sin. x \cdot F(x) dx.\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\text{Lim. } k = \infty)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijkingen is nul, volgens de formule (VIII) van N°. 4: de tweede integraal moet men uit de formules in N°. 5 en 6 afleiden door aldaar respectie $F(x) = \text{Tang. } x \cdot F(x)$ en $F(x) = \sin. x \cdot \frac{\sin. x}{\cos. x} F(x) = \frac{\sin.^2 x}{\cos. x} F(x)$ aan te nemen.

De integraal

$$I_{1,4} = \int_0^a \frac{\sin. kx}{\cos. x} \sin. x \cdot F(x) dx = \int_0^a \sin. kx \cdot \text{Tang. } x \cdot F(x) dx$$

wordt onstadig voor $x = \frac{2b+1}{2}\pi$; en men moet dus eerst het theorema (X) raadplegen, in hoeverre hier aan de vergelijking $\text{Lim. } \delta F(k \pm \delta)$ voldaan wordt. Deze toch wordt hier

$$\begin{aligned}0 &= \text{Lim. } \delta \cdot \frac{\sin. \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right)}{\cos. \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right)} F \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right) = \text{Lim. } \delta \cdot \frac{\sin. \left(\frac{2b+1}{2} \pi \right) \cdot \cos. \delta}{\mp \sin. \left(\frac{2b+1}{2} \pi \right) \cdot \sin. \delta} F \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right) = \\ &= \text{Lim. } \frac{\delta}{\mp \text{Tang. } \delta} F \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right) = \mp \text{Lim. } \frac{\delta}{\text{Tang. } \delta} \cdot \text{Lim. } F \left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta \right) \cdot (\text{Lim. } \delta = 0)\end{aligned}$$

Om aan deze voorwaardenvergelijking te voldoen, waarin $\text{Lim.} \frac{\delta}{\text{Tang.} \delta} = 1$ is, moet $\text{Lim.} F\left(\frac{2b+1}{2} \pi \pm \delta\right) = 0$ zijn, dat is $F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) = 0$; derhalve

$$I_{1,1} = \int_0^a \text{Sin. } kx \cdot \text{Tang. } x \cdot F(x) dx = 0, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) = 0 \text{ is. (Lim. } k = \infty) \dots (\text{XXII})$$

Wanneer daarentegen $F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right)$ niet altijd nul is, zoo leert ons de vergelijking (X) niets meer, en men moet tot N°. 6 overgaan. Vooreerst volgt uit (XI), daar voor a kleiner dan $\frac{1}{2} \pi$ de functie $\frac{\text{Sin.}^2 x}{\text{Cos. } x} F(x)$ stadig blijft, en die vergelijking alzoo hier geldig is:

$$\int_0^a \text{Sin. } kx \cdot \text{Tang. } x \cdot F(x) dx = \frac{\pi}{2} \frac{\text{Sin.}^2 a}{\text{Cos. } a} F(a) = 0, \quad a < \frac{1}{2} \pi. \quad (\text{Lim. } k = \infty) \dots (\text{XXIII})$$

Voor alle volgende vergelijkingen is $F(b\pi)$

$$\frac{\text{Sin.}^2 b\pi}{\text{Cos. } b\pi} F(b\pi) = \frac{0}{1} F(b\pi) = 0,$$

als $F(x)$ stadig is, en worden dus de waarden der integralen allen nul; maar voor alle waarden van $x = \frac{2b+1}{2} \pi$ wordt dezelfde $F(x)$

$$\frac{\text{Sin.}^2\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right)}{\text{Cos.}\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right)} F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) = \frac{+1}{0} F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) = \infty, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) \text{ niet altijd nul is;}$$

en daaruit volgt:

$$\int_0^a \text{Sin. } kx \cdot \text{Tang. } x \cdot F(x) dx = \infty, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2} \pi\right) \text{ niet altijd nul is. (Lim. } k = \infty) \dots (\text{XXIV})$$

Volgens deze vergelijkingen (XXII) tot (XXIV) gaan nu de vergelijkingen (t) over in de volgende:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \frac{\cos. 4kx}{\cos. x} F(x) dx &= 0, & a < \frac{1}{2}\pi; \\ &= 0, \\ &= \infty. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\frac{1}{2}\pi \leq a < \infty, \text{ naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right), (\text{Lim. } k = \infty) \\ &\text{altijd of niet altijd nul is.} \end{aligned} \left. \begin{aligned} \int_0^a \frac{\cos. \{(4k+2)x\}}{\cos. x} F(x) dx &= 0, \\ &= -\infty, \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{ (XXV)} \\ &a < \frac{1}{2}\pi; \end{aligned}$$

Dit verschil tusschen de stelsels vergelijkingen (XX) en (XXV) doet gevoegzaam den invloed van den vorm van k op de waarde der hier behandelde integraal kennen, waarbij altijd $F(x)$ stadig is ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

8. Stellen wij nu in de integraal (IV) $f(x) = \frac{x}{\cos. x} \cdot F(x)$, dan wordt deze

$$\int_0^a \frac{\sin. kx}{\cos. x} F(x) dx = 0, \quad 0 < a < \frac{1}{2}\pi; \quad (\text{Lim. } k = \infty). \dots \text{ (XXVI)}$$

maar dit alleen zoo lang $f(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie; daar nu voor $x = \frac{1}{2}\pi$, $\cos. x$ nul en dus de functie oneindig wordt, moet in de vorige vergelijking a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ blijven. Voor a grooter dan, of gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ is dus eene nieuwe onderzoeking noodig; daartoe gebruike men de goniometrische formule

$$\sin. kx = \sin. \{(k-1)x\} \cdot \cos. x + \cos. \{(k-1)x\} \cdot \sin. x;$$

dan is:

$$I_{1z} = \int_0^a \sin. \{(k-1)x\} \cdot F(x) dx + \int_0^a \frac{\cos. \{(k-1)x\}}{\cos. x} \cdot \sin. x \cdot F(x) dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty). \quad (u)$$

De algemeene vergelijking (X) leert ons, dat de eerste integraal nul is, zoo lang $F(x)$ stadig blijft tusschen de grenzen van het integreren, en dit zal men toch bij de tweede integraal moeten onderstellen, want deze is een bijzonder geval van de formules van het vorige nummer: men moet daár slechts voor $F(x)$ stellen $\sin. x \cdot F(x)$. Zij dus vooreerst in (u) $k' = 4k \pm 1$, dan wordt $k' - 1 = 4k$ of $4k - 2$, en derhalve volgens de vergelijkingen (XXV):

$$\int_0^a \frac{\sin\{(4k \pm 1)x\}}{\cos x} F(x) dx = 0, \quad a \leq \frac{1}{2}\pi; \\ = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi \leq a < \infty, \text{ naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \\ = \pm \infty, \end{array} \right. \text{ altijd nul is of niet.} \quad \left. \vphantom{\int_0^a} \right\} \text{ (Lim. } k = \infty \text{)} \quad \dots \text{ (XXVII)}$$

Zij vervolgens $k' = 4k$ of $4k+2$, zoo wordt $k'-1 = 4k \mp 1$ en dus naar de vergelijkingen (XXI) en (XX), daar $F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ hier

$$\sin\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \cdot F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \cos b\pi \cdot F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ wordt, } \dots \dots (v)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^a \frac{\sin 4kx}{\cos x} F(x) dx &= + \int_0^a \frac{\sin\{(4k+2)x\}}{\cos x} F(x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad a = \frac{1}{2}\pi; \\ &= \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3}{2}\pi; \\ &= \frac{\pi}{2} \left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right], \quad a = \frac{3}{2}\pi; \\ &= \frac{\pi}{2} \left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \dots - 2\cos b\pi \cdot F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos b\pi \cdot F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \right], \quad a = \frac{2b+1}{2}\pi; \\ &= \pi \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \dots + \cos b\pi \cdot F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \right], \quad a = \frac{2b+1}{2}\pi + c; \\ &= \pi \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \dots \right], \quad a = \infty. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_0^a} \right\} \text{ (Lim. } k = \infty \text{)} \quad \dots \text{ (XXVIII)}$$

$F(x)$ zij steeds stadig tusschen de grenzen der integratie.

9. Eindelijk moet men nog in het theorema (VI) $\frac{x}{\sin x} F(x)$ voor $f(x)$ aannemen om de integraal

$$I_{10} = \int_0^a \frac{\cos kx}{\sin x} F(x) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

te verkrijgen, waarover reeds in N°. 7 gesproken werd. Ten einde hare waarde uit het vorige af te leiden, gebruike men de goniometrische formule

$$\cos kx = \cos \{(k+1)x\} \cdot \cos x + \sin \{(k+1)x\} \cdot \sin x,$$

zoodat

$$I_{1,6} = \int_0^a \frac{\cos \{(k+1)x\}}{\sin x} \cos x \cdot F(x) dx + \int_0^a \sin \{(k+1)x\} \cdot F(x) dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty). \quad (w)$$

wordt. Zoolang $F(x)$ tusschen de grenzen 0 en a stadig blijft, en bij deze onderstelling zijn wij toch gedwongen ons te bepalen, wordt de waarde der laatste integraal nul volgens formule (X). Wat de eerste integraal in het tweede lid der vergelijking (w) betreft, namelijk

$$\begin{aligned} I_{1,7} &= \int_0^a \frac{\cos \{(k+1)x\}}{\sin x} \cos x \cdot F(x) dx = \int_0^a \cos \{(k+1)x\} \cdot \cot x \cdot F(x) dx \\ &= \int_0^a \frac{\cos \{(k+1)x\}}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} F(x) dx, \end{aligned}$$

hierin blijkt vooreerst dat voor $x = b\pi$ telkens de geïntegreerde functie onstendig wordt; het theorema (IX) zal ons dus moeten leeren, van welken invloed dit op de waarde der integraal zij. De voorwaarden-grensvergelijking $\text{Lim. } \delta F(h \pm \delta) = 0$, wordt dus hier:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Lim. } \delta \cot(b\pi \pm \delta) \cdot F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim. } \delta \frac{\cos(b\pi \pm \delta)}{\sin(b\pi \pm \delta)} F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim. } \delta \frac{\cos b\pi \cdot \cos \delta}{\pm \cos b\pi \cdot \sin \delta} F(b\pi \pm \delta) \\ &= \pm \text{Lim. } \frac{\delta}{\text{Tang. } \delta} \cdot \text{Lim. } F(b\pi \pm \delta). \quad (\text{Lim. } \delta = 0) \end{aligned}$$

Nu is (even als vroeger N°. 7) $\text{Lim. } \frac{\delta}{\text{Tang. } \delta} = 1$, dus moet $\text{Lim. } F(b\pi \pm \delta) = 0$, dat is $F(b\pi) = 0$ zijn, om aan de vergelijking (IX) te kunnen voldoen; maar alsdan wordt ook:

$$\int_0^a \cos kx \cdot \cot x \cdot F(x) dx = 0, \text{ als } F(b\pi) \text{ altijd } 0 \text{ is. } (\text{Lim. } k = \infty). \dots \text{ (XXIX)}$$

Wanneer daarentegen niet altijd $F(b\pi)$ nul wordt, moeten wij ons wenden tot N°. 7. Aldaar is dan in het algemeen

$$F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{\cos.\frac{2b+1}{2}\pi}{\sin.\frac{2b+1}{2}\pi} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{0}{\cos.b\pi} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0;$$

maar dezelfde functie wordt reeds onstadig voor $x = \pi$, en verder voor alle $x = b\pi$; want dan is:

$$F(b\pi) = \frac{\cos.\frac{2b}{2}\pi}{\sin.b\pi} F(b\pi) = \frac{1}{0} F(b\pi).$$

Is dan $F(b\pi)$ niet altijd nul, zoo wordt

$$\int_0^a \cos.kx \cot.x.F(x)dx = 0, \quad a < \pi; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (Lim.k = \infty) \\ \dots (XXX) \end{array}$$

$$= \infty, \pi < a < \infty, \text{ indien } F(b\pi) \text{ niet altijd nul is.}$$

Deze uitkomsten (XXIX) en (XXX) in (w) overbrengende, komt er eindelijk

$$\int_0^a \frac{\cos.kx}{\sin.x} F(x)dx = 0, \quad a < \pi; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (Lim.k = \infty) \\ \dots (XXXI) \end{array}$$

$$= 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi < a < \infty, \text{ naarmate } F(b\pi) \text{ altijd nul is of niet.} \end{array}$$

Ook hier wordt $F(x)$ ondersteld stadig te blijven tusschen de grenzen van de integratie.

Het is opmerkelijk, dat deze integraal, die zooveel overeenkomst heeft met die van het vorige nummer, tot geheel andere uitkomsten leidt, in zoo verre hier de vorm van k niet in aanmerking kwam, hetgeen daar wel het geval was: overigens bestaat in dit opzigt een groot verschil tusschen de vier gelijkvormige integralen van N°. 6, 7, 8 en 9.

10. Het aangevoerde moge genoegzaam zijn, om te staven wat in den aanvang beweerd is omtrent de oplettenheid, die men moet wijden aan den toestand van de grootheid k , of deze van den vorm $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ zij; men heeft gezien, hoe zeer in sommige gevallen deze vorm invloed had op de waarde, en in andere gevallen de waarde voor alle k dezelfde blijft. Men mag hierbij niet over het hoofd zien, dat k altijd als een geheel getal werd beschouwd, zoodra daarbij bijzondere vormen werden aangenomen, terwijl anders k geheel willekeurig is.

Uit de gegevene theorie van de algemeene integralen

$$\int_0^a \sin. kx. f(x) dx, \int_0^a \sin. kx. f(x) \frac{dx}{x}, \int_0^a \frac{\sin. kx}{\sin. x} f(x) dx, \int_0^a \frac{\sin. kx}{\cos. x} f(x) dx,$$

$$\int_0^a \cos. kx. f(x) dx, \int_0^a \cos. kx. f(x) \frac{dx}{x}, \int_0^a \frac{\cos. kx}{\cos. x} f(x) dx, \int_0^a \frac{\cos. kx}{\sin. x} f(x) dx,$$

waarbij zich nog voordeden de beide bijzondere vormen

$$\int_0^a \sin. kx. \text{Tang. } x. f(x) dx \text{ en } \int_0^a \cos. kx. \text{Cot. } x. f(x) dx,$$

(waar overal $\text{Lim. } k = \infty$), kunnen nu voor elk bijzonder geval de verandering der integralen worden afgeleid.

Men konde zich nog de vraag voorstellen, of niet in plaats van de functie $\sin. kx$ of $\cos. kx$ eenige andere goniometrische functie $\text{Tang. } kx$, $\text{Cot. } kx$, $\text{Sec. } kx$ of $\text{Cosec. } kx$ in te voeren ware: men ziet echter gemakkelij in, dat alsdan de uitkomst oneindig zoude worden. Want daar deze laatste functiën

of voor $kx = \frac{2b+1}{2}\pi$ of voor $kx = b\pi$ oneindig worden, zoo zal er voor elke x hoe klein deze ook worde aangenomen, k zoo groot kunnen genomen worden, dat kx eene van bovengenoemde waarden verkrijgt, en dus de integraal oneindig wordt. Dit bezwaar zoude vervallen zoodra de bovenste grens van de integratie oneindig klein ware, maar dan worden de integralen tot eene bijzondere soort teruggebracht, die door CAUCHY *Integrales définies singulieres* genoemd zijn, en hier niet verder zullen worden nagegaan.

Omdat te gelijk met iedere integraal waarin de factor $\sin. kx$ voorkomt, eene andere gelijksoortige gevonden is, die slechts daarin verschilt dat de factor $\cos. kx$ den vorigen vervangt, zoo is wegens de formule

$$e^{\pm kxi} = \cos. kx \pm i \sin. kx$$

ook

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x) dx = \int_0^a \cos. kx. f(x) dx \pm i \int_0^a \sin. kx. f(x) dx.$$

Daardoor geven de theorema's (IX) en (X):

$$\int_b^a e^{\pm kxi} F(x) dx = 0. \quad (\text{Lim. } k = \infty).$$

Wordt $F(x)$ voor b, a , of h ($a > h > b$) onstadij, zoo moet
 nog respective $\text{Lim. } \delta F(b + \delta) = 0$, $\text{Lim. } \delta F(a - \delta) = 0$,
 $\text{Lim. } \delta F(h \pm \delta) = 0$ wezen voor $\text{Lim. } \delta = 0$; b kan ook nul zijn. (XXXII)

Evenzoo (IV) en (VI):

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x) \frac{dx}{x} = \infty \cdot \pi f(0) \cdot (\text{Lim. } k = \infty) \cdot \dots \quad (\text{XXXIII})$$

Verder uit de theorema's (XI), (XII), (XV), (XVIII) en (XIX) verbonden met (XXXI):

$$\int_0^a e^{\pm kxi} F(x) \frac{dx}{\text{Sin. } x} = \pm \frac{1}{2} \pi i F(0) \quad , \quad 0 < a < \pi; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\text{Lim. } k = \infty)$$

$$= \pm \frac{1}{2} \pi i F(0), \quad \left. \begin{array}{l} , \pi < a < \infty, \text{ naarmate } F(b\pi) \text{ altijd of} \\ , \text{ niet altijd nul is.} \end{array} \right\} \quad (\text{XXXIV})$$

$$= \infty$$

Eindelijk geven (XX), (XXI) en (XXV) verbonden met (XXVI), (XXVII) en (XXVIII):

$$\int_0^a e^{\pm kxi} F(x) \frac{dx}{\text{Cos. } x} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} , (\text{Lim. } k = \infty), 0 < a < \infty, \\ , \text{ naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd nul is of niet.} \end{array} \right\} \quad (\text{XXXV})$$

$$= \infty$$

Het is opmerkelijk, dat hier alle onderscheid tusschen de verschillende vormen van k ten eenenmale wegvalt, hetgeen dan eens aan de integralen met $\text{Cos. } kx$, dan weder aan die met $\text{Sin. } kx$ te wijten is.

41. Hoewel in het voorgaande reeds onderscheidene toepassingen voorkomen van de hoofdvergelijkingen zelve, zal het misschien niet ondienstig zijn eene regtstreeksche toepassing aan te voeren, die meermalen voorkomt, maar dikwerf met uitkomsten, die van de hier gegebene verschillen. Zij daartoe:

$$F_1(x) = \frac{\text{Sin. } x}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2} f(x) \text{ of } F_2(x) = \frac{\text{Cos. } x}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2} f(x).$$

Opdat deze functie stadig blijve tusschen de grenzen der integratie zal men moeten nagaan: wanneer de noemer $1 - 2p \text{Cos. } x + p^2$ nul kan worden; stelt men daarin $\text{Cos. } x = 1 - 2 \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} x$, zoo komt er $(1-p)^2 + 4p \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} x$, dus de som van twee vierkanten; derhalve moet elk vierkant op zich zelf nul worden: met den tweeden term $4p \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} x$ is dit steeds het geval, zoodra $x = 2b\pi$, dus $\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} x = \text{Sin.}^2 b\pi$ is; met den eersten term daarentegen slechts dan, wanneer $p = 1$ is. Om de onstadigheid derhalve te voorkomen, heeft men slechts het geval van $p = +1$ uit te sluiten, dus de voorwaarde te stellen $-\infty < p < +1$, $+1 < p < \infty$. Hierbij is natuurlijk ondersteld, dat $f(x)$ weder stadig blijve tusschen de grenzen van het integreren.

Nu heeft men:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 0, F_1(b\pi) = 0, F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{1+p^2} f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{\cos.b\pi}{1+p^2} f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right), \\ F_2(0) &= \frac{1}{(1-p)^2} f(0), F_2(2b\pi) = \frac{1}{(1-p)^2} f(2b\pi), \\ F_2\left\{(2b+1)\pi\right\} &= \frac{-1}{(1+p)^2} f\left\{(2b+1)\pi\right\}, F_2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0. \end{aligned}$$

En daaruit volgt, naar de vergelijkingen (IV), (IX), (X):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \frac{\sin.k.x.\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) \frac{dx}{x} &= 0, \\ \int_0^a \frac{\sin.k.x.\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) \frac{dx}{2} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-p)^2} f(0), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &, 0 < a < \infty, (\text{Lim. } k = \infty) \dots (1) \\ & \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\int_b^a \frac{\cos.k.x.\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx = 0, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_b^a \frac{\cos.k.x.\cos.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx &= 0, \\ \int_b^a \frac{\sin.k.x.\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Wordt } f(x) \text{ voor } b, a, \text{ of } h (a > h > b) \\ &\text{onstadijg, zoo moet nog respective} \\ &\text{Lim. } \delta f(b+\delta) = 0, \text{ Lim. } \delta f(a-\delta) = 0, \\ &\text{Lim. } \delta f(h \pm \delta) = 0 \text{ zijn, voor Lim. } \delta = 0; \\ &b \text{ kan ook nul zijn. (Lim. } k = \infty). \end{aligned} \quad (4) \quad (5)$$

$$\int_b^a \frac{\sin.k.x.\cos.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx \neq 0. \quad (6)$$

De vergelijkingen (5) en (6) zoowel als (4) en (5), door optelling en aftrekking te zamen verbonden, geven, wanneer men voor $k-1$ of $k+1$ weder eenvoudig k schrijft:

$$\left. \begin{aligned} \int_b^a \frac{\sin.k.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx &= 0, \\ \int_b^a \frac{\cos.k.x}{1-2p\cos.x+p^2} f(x) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Wordt } f(x) \text{ voor } b, a, \text{ of } h (a > h > b) \text{ on-} \\ &\text{stadijg, zoo moet nog respective} \\ &\text{Lim. } \delta f(b+\delta) = 0, \text{ Lim. } \delta f(a-\delta) = 0, \\ &\text{Lim. } \delta f(h \pm \delta) = 0 \text{ zijn, voor Lim. } \delta = 0. \\ &b \text{ kan ook nul zijn. (Lim. } k = \infty). \end{aligned} \quad (7) \quad (8)$$

Vergelijking (XI) voor $a < \pi$, (XIV, 1) voor $a = \pi$, (XVII, 1) voor $a = 2b\pi$, (XVII, 2) voor $a = (2b+1)\pi$, (XVIII, 4) voor $a = 2b\pi + c$, (XVIII, 5) voor

$a = (2b + 1)\pi + c$ en (XIX, 5) voor $a = \infty$, geven voor de onderstelling $F_1(x)$ nul tot waarde, en dit is reeds in (7) gevonden. Bij de onderstelling $F_2(x)$ daarentegen geven de vergelijkingen (XI), (XIII), (XVI), (XVIII, 1—5) (XIX, 1, 2) het volgende, waarbij somtijds nog het even of oneven zijn van b te onderscheiden viel:

$$\int_0^a \frac{\sin kx \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-p)^2} f(0) \quad , \quad a < \pi; \dots \dots \dots (9)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2kx \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{(1-p)^2} f(0) + \frac{1}{(1+p)^2} f(\pi) \right], \dots \dots \dots (10)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \{(2k-1)x\} \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{(1-p)^2} f(0) - \frac{1}{(1+p)^2} f(\pi) \right], \dots \dots \dots (11)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{\sin \{(2k-1)x\} \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(0) + 2f(2\pi) + \dots + 2f\{(2b-2)\pi\} + f(2b\pi)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b-1)\pi\}] \right\} \quad , \quad (12)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{\sin \{(2k-1)x\} \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(0) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{(1+p)^2} [2f(\pi) + 2f(3\pi) + \dots + 2f\{(2b-1)\pi\} + f\{(2b+1)\pi\}] \right\} \quad , \quad (13)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{\sin 2kx \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(0) + 2f(2\pi) + \dots + 2f\{(2b-2)\pi\} + f(2b\pi)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b-1)\pi\}] \right\} \quad , \quad (14)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{\sin 2kx \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(0) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1+p)^2} [2f(\pi) + 2f(3\pi) + \dots + 2f\{(2b-1)\pi\} + f\{(2b+1)\pi\}] \right\} \quad , \quad (15)$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{\sin \{(2k-1)x\} \cdot \cot x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(0) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b-1)\pi\}] \right\} \quad , \quad (16)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{\sin. \{(2k+1)x\} \cdot \cot. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(o) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b+1)\pi\}] \right\}, \dots (17)$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{\sin. 2kx \cdot \cot. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(o) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b-1)\pi\}] \right\}, \dots (18)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{\sin. 2kx \cdot \cot. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(o) + 2f(2\pi) + \dots + 2f(2b\pi)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots + f\{(2b+1)\pi\}] \right\}, \dots (19)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin. \{(2k-1)x\} \cdot \cot. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(o) + 2f(2\pi) + \dots] - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots] \right\}, \dots (20)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin. 2kx \cdot \cot. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-p)^2} [f(o) + 2f(2\pi) + \dots] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(1+p)^2} [f(\pi) + f(3\pi) + \dots] \right\}, \dots (21)$$

overal is $\text{Lim. } k = \infty$.

Verder voert bij de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV, 1, 2, 4, 6) de onderstelling $F_2(x)$ steeds tot eene waarde nul, zoo als reeds in verg. (8) gevonden werd. Daarentegen geeft de andere onderstelling $F_1(x)$ nieuwe uitkomsten. Omdat $F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{\cos. b\pi}{1+p^2} f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ is, moet men somtijds onderscheid maken tusschen:

$$F_1\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right) = \frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right) \text{ en } F_1\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) = \frac{-1}{1+p^2} f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right);$$

en dan verkrijgt men door de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV):

$$\int_0^\pi \frac{\cos. \{(4k \pm 1)x\} \cdot \tan. x}{1-2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \dots (22)$$

$$\int_0^a \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1 + p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}; \dots \quad (23)$$

$$\int_0^{3\pi} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + p^2} \left\{ 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\}, \dots \quad (24)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + p^2} \left[\left\{ 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + 2f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) \right\} - 2\left\{ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) \right\} \right], \quad (25)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + p^2} \left[2\left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right) \right\} - \left\{ 2f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \dots + 2f\left(\frac{4b-5}{2}\pi\right) + f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) \right\} \right], \quad (26)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi + c} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1 + p^2} \left[\left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right) \right\} - \left\{ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) \right\} \right], \quad (27)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi + c} \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1 + p^2} \left[\left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right) \right\} - \left\{ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right) \right\} \right], \quad (28)$$

$$\int_0^a \frac{\cos\{(4k \pm 1)x\} \cdot \text{Tg. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1 + p^2} \left[\left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots \right\} - \left\{ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \dots \right\} \right], \quad (29)$$

$$\int_0^a \frac{\cos. 4kx \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = 0, \quad a < \frac{1}{2}\pi; \dots \quad (30)$$

$$= 0, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi \leq a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \\ \text{altijd of niet altijd nul is.} \end{array} \right\} \quad (31)$$

$$\int_0^a \frac{\cos\{(4k+2)x\} \cdot \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = 0, \quad \dots \quad (32)$$

$$= -\infty, \quad \left. \begin{array}{l} a < \frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \quad (33)$$

alwaar overal $\text{Lim. } k = \infty$.

Wanneer men $F_2(x)$ in de vergelijkingen (XXVI), (XXVII) en (XXVIII) invoert, wordt men wederom tot de integraal (7) gevoerd; maar de onderstelling $F_1(x)$ geeft integendeel bij die zelfde vergelijkingen:

$$\int_0^a \frac{\sin. kx. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = 0, \quad 0 < a < \frac{1}{2}\pi; \dots\dots\dots (34)$$

$$\int_0^a \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi \leq a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd} \\ \text{nul is of niet} \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \dots\dots\dots (36)$$

$$\int_0^a \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3}{2}\pi, \dots\dots (37)$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1+p^2} \left[2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right], \dots\dots (38)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi} \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+p^2} \left[2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \dots \right. \\ \left. + 2f\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \right], \dots\dots (39)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi + c} \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1+p^2} \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \dots + f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \right], (40)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin. \{(k \pm 1)x\}. \text{Tang. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = \pm \frac{\pi}{1+p^2} \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \dots \right] \dots\dots (41)$$

Hier is ook overal $\text{Lim. } k = \infty$.

Eindelijk gebruike men de formule (XXXI). Bij de onderstelling $F_1(x)$ komt men wederom terug tot de integraal (8); bij de andere $F_2(x)$ daarentegen hier tot de uitkomsten

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. kx. \text{Cot. } x}{1 - 2p \cos. x + p^2} f(x) dx = 0, \quad a < \pi, (\text{Lim. } k = \infty) \dots\dots\dots (42)$$

$$\left. \begin{array}{l} = 0, \\ = \infty, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi < a < \infty, \text{ naarmate } f(b\pi) \text{ steeds nul is of niet.} \\ (\text{Lim. } k = \infty) \dots\dots\dots \end{array} (43)$$

Nog kunnen de hulpformnlen (XXII) tot (XXIV) en (XXIX), (XXX) hier worden toegepast. Het eerste stel leidt voor $F_2(x)$ tot de integraal (5); het tweede voor de onderstelling $F_1(x)$ tot de integraal (4); wanneer men daarentegen in de eerste formnlen $F_1(x)$ en in de laatste $F_2(x)$ invoert, zoo is

$$\int_0^a \frac{\sin kx \sin x \operatorname{Tang} x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = 0 \quad , \quad a < \frac{1}{2}\pi, (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (44)$$

$$= 0, \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet} \\ = \infty. \end{array} \right\} \text{altijd nul is. } (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (45)$$

$$\int_0^a \frac{\cos kx \cos x \operatorname{Cot} x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = 0 \quad , \quad a < \pi, (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (46)$$

$$= 0, \left. \begin{array}{l} \pi < a < \infty, \text{naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd} \\ = \infty. \end{array} \right\} \text{nul is. } (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (47)$$

Daar

$$\sin x \operatorname{Tang} x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x,$$

$$\text{en} \quad \cos x \operatorname{Cot} x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \sin x$$

is, zoo volgt uit de verbinding van de integralen (6) met (44) en (45), en van (5) met (46) en (47):

$$\int_0^a \frac{\sin kx \sec x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = 0 \quad , \quad a < \frac{1}{2}\pi, (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (48)$$

$$= 0, \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet} \\ = \infty. \end{array} \right\} \text{altijd nul is. } (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (49)$$

$$\int_0^a \frac{\cos kx \operatorname{cosec} x}{1 - 2p \cos x + p^2} f(x) dx = 0 \quad , \quad a < \pi, (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (50)$$

$$= 0, \left. \begin{array}{l} \pi < a < \infty, \text{naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd} \\ = \infty. \end{array} \right\} \text{nul is. } (\operatorname{Lim}.k = \infty) \dots\dots\dots (51)$$

Bij al deze formnlen is even als vroeger steeds $f(x)$ stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie, uitgezonderd bij die, waar het tegendeel uitdrukkelijk wordt opgegeven; ook is p gebonden door de ongelijkheden $-\infty < p < +1$, $+1 < p < \infty$, dat is p ongelijk aan $+1$.

Men heeft hier tevens eene wederzijdsche bevestiging van sommige der gevondene theoremeta, in de omstandigheid dat de formules (IX), (X), (XI), (XIV), (XVII), (XVIII), (XIX), (XXVI), (XXVII), (XXVIII), hoezeer zij ook mogen verschillen, bij geschikte onderstellingen allen tot dezelfde integraal (7) voeren; evenzoo de formules (IX), (X), (XX), (XXI), (XXV), (XXXI) tot de integraal (8), de formules (X), (XXII) tot (XXIV) tot de integraal (5) en de formules (IX), (XXIX), (XXX) tot de integraal (4).

Van de hier bepaalde integralen komen, als $f(x) = 1$ wordt genomen, N°. 8 en 35 voor op Table 84 N°. 11 en 12 mijner *Tables d'Intégrales Définies*.

* Wilde men bijv. de integraal $I = \int_0^{\pi} \frac{\text{Sec. } x dx}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2}$ nagaan, (zie *Tables d'Intégrales Définies*).

T. 85. N°. 4, 5, zoo kan men daartoe de bekende ontwikkeling van $\text{Sec. } x$ in eenen reeks gebruiken:

$$\text{Sec. } x = -2 \sum_1^{k-1} (-1)^n \text{Cos. } \{(2n-1)x\} - \frac{\text{Cos. } 2kx}{\text{Cos. } x} (-1)^k.$$

Dan wordt

$$I = -2 \sum_1^{k-1} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\text{Cos. } (2n-1)x dx}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2} - (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\text{Cos. } 2kx}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2} \frac{dx}{\text{Cos. } x}$$

Ten einde dit uit te werken late men k oneindig worden. Alsdan is naar *Tables d'Int. Déf. T. 84. 3* de eerste term van het eerste lid

$$= -2 \sum_1^{k-1} (-1)^n \frac{\pi}{1-p^2} p^{2n-1} = \frac{-2\pi}{1-p^2} \sum_1^{k-1} (-1)^n p^{2n-1} = \frac{-2\pi}{1-p^2} \frac{-p}{1+p^2} = \frac{2p\pi}{1-p^2}.$$

Voor den tweeden term wende men zich tot de hiervoor gevonden formules en wel tot 30—33. Stellende aldaar $f(x) = \text{Cosec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x \cdot \text{Tang. } x}$ wordt, daar $a = \pi$ hier grooter dan $\frac{1}{2}\pi$ is, voor alle evenen k

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{Cos. } 2kx}{1 - 2p \text{Cos. } x + p^2} \frac{dx}{\text{Cos. } x} = (-1)^k \infty, \text{ daar } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \text{Cosec.}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \pm 1,$$

niet nul is. Dientengevolge is de waarde van onze integraal oneindig groot, en niet $\frac{2p\pi}{1-p^2}$, zoo als SCHÜMMLER vindt.

Evenzeer geven ons de gevondene theoremeta o. a. dat b. v. de bekende integralen, *Tables etc.*, T. 205. N°. 13, 16, T. 17. N°. 10, 1:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Tang. } px dx}{q^2 + x^2}, \int_0^{\infty} \frac{\text{Cot. } px dx}{q^2 + x^2}, \int_0^{\infty} \frac{\text{Sec. } px dx}{q^2 + x^2}, \int_0^{\infty} \frac{x \text{Cosec. } px dx}{q^2 + x^2}$$

alle oneindig moeten zijn.

En hiermede mogen wij de theorie van de bepaalde integralen

$$\int_a^b \text{Sin. } kx.f(x)dx \quad \text{en} \quad \int_a^b \text{Cos. } kx.f(x)dx, \quad (\text{Lim. } k = \infty),$$

als afgehandeld beschonwen, daar men in ieder bijzonder geval zich tot de gevondene theoreemata kan wenden, en daaruit de overeenkomstige uitkomst afleiden. Voor het beweren, dat men dikwerf op den bijzonderen vorm van k te letten heeft, hebben de bewijzen niet ontbroken: daár, waar zulks te pas kwam, is gewezen op het verschil, dat er in dit opzigt dikwijls bestaat tusschen integralen, die oogenschijnlijk tot uitkomsten van denzelfden aard moesten aanleiding geven, maar waarbij dan eens k geheel algemeen bleef, dan weder in twee of vier afzonderlijke vormen werd gesplitst; ja, men heeft gezien, dat ook bij de grenzen der integratie dikwerf bijzondere vormen moesten onderscheiden worden. Wij moeten nu nagaan, welken invloed de bijzondere vormen van het oneindige uitoefenen, wanneer zij als grenzen der integratie zich voordoen.

II. OVER DE INTEGRAAL $\int_0^\infty \varphi(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx$.

12. Over deze soort van bepaalde integra'en zijn zeer verschillende meeningen geopperd, en deze hebben tot zeer verschillende uitkomsten geleid; vele dier meeningen berusten echter op verkeerde gronden en valsche voorstellingen van het wezen eener bepaalde integraal. Zoo werd bijv. in eene bepaalde integraal

$$\int_0^\infty f(ax)F(b, x)dx = \psi(a, b), \dots\dots\dots (x)$$

waar de functie van dien aard was, dat $f(0) = 1$ werd, $a = 0$ gesteld, en daaruit afgeleid

$$\int_0^\infty F(b, x)dx = \psi(0, b); \dots\dots\dots (y)$$

terwijl men daarbij vergat, dat de vergelijking (x) bepaaldelijk was ontwikkeld onder de voorwaarde, dat a grooter dan 0 moest blijven. De afleiding van de integraal (y) uit (x) op die wijze was dus ongeoorloofd, al konde het

soms geheuren, dat zij tot eene ware uitkomst voerde ten gevolge van bijzondere eigenschappen der integraal (x); maar het waren juist deze, somtijds met anders verkregene overeenstemmende, uitdrukkingen, die tot het aanwenden der bovengemelde, niet steek houdende, methode verleid hebben.

Later heeft RAABE gedeeltelijk in navolging van POISSON * in het *Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle*, Bd. 15. S. 355, über die *Summation periodischer Reihen* † zich meer bepaaldelijk met deze soort van integralen bezig gehouden, maar is daarbij van niet geldige gronden uitgegaan. Hij beschouwde eene reeks

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_p x^{p-1} \\ + a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + a_3 x^{p+2} + \dots + a_p x^{2p-1} \\ + a_1 x^{2p} + a_2 x^{2p+1} + \dots$$

die uit perioden bestaat, elke van p termen, waarbij zich dezelfde coëfficiënten $a_1, a_2 \dots a_p$, telkens in dezelfde orde herhalen, zoodat

$$y = (1 + x^p + x^{2p} + \dots)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_p x^{p-1})$$

is. Wordt $x = 1$, zoo stelt hij

$$1 + x^p + x^{2p} + \dots = \frac{1}{1 - x^p}; \dots\dots\dots (z)$$

zoodat

$$y = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_p x^{p-1}}{1 - x^p}$$

wordt: bij de onderstelling

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p = 0,$$

waardoor de teller der vorige breuk door $1 - x$ deelbaar wordt, verkrijgt hij voor $x = 1$:

$$y = \frac{(p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \dots + 3a_{p-3} + 2a_{p-2} + a_{p-1}}{p}$$

Deze uitkomst echter geldt niet, daar (z) slechts voor x kleiner dan de eenheid geldig is en niet meer voor x gelijk één, en het daarop gebouwde resultaat:

* Zie diens beschouwingen over de *Summation des Séries de Quantités périodiques*, voorkomende in het *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 19, p. 404. N°. 45—56.

† Zie nog zijne verhandeling über die *Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen*, in het *Journal von Crelle*, Bd. 23. S. 105 en Bd. 25. S. 160.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha kx, \cos. \beta kx) x dx, \\ \text{als} \quad \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha kx, \cos. \beta kx) dx &= 0 \text{ is,} \end{aligned} \right\} \dots (aa)$$

vervalt daarmede reeds, behalve wegens hetgeen nog op de verdere redenering aan te merken is. In den grond der zaak verschilt dan ook eigenlijk deze methode weinig van de straks afgekeurde.

Op de volgende wijze ontgaat men daarentegen het gebruik van divergente reeksen, en derhalve het onware, althans onzekere, van de daarop gebouwde redeneringen; men komt echter daarbij niet tot zulke algemeene uitkomsten, wat de grens oneindig betreft; of liever, men ziet, welke beteekenis men in het vorige aan die grens te hechten had.

15. Het is bekend, dat de definitie van eene bepaalde integraal door de formule

$$\int_{\epsilon}^q f(x) dx = \text{Lim.} \delta \{f(\epsilon) + f(\epsilon + \delta) + f(\epsilon + 2\delta) + \dots + f(q - \delta)\}, (q = n\delta), (\text{Lim.} \delta = 0). (A)$$

wordt uitgedrukt. Neemt men hierin δ voor de onderste grens ϵ , zoo is

$$\int_{\delta}^q f(x) dx = \text{Lim.} \delta \{f(\delta) + f(2\delta) + f(3\delta) + \dots + f[(n-1)\delta]\} \dots (A_1)$$

Wanneer men nu hierin $f(x) = \frac{x}{r^2} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x)$ aanneemt, — het zal later blijken, waarom hier de exponentiele factor bij de goniometrische functie is gevoegd, — zoo wordt dit:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^q \frac{x}{r^2} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= \text{Lim.} \delta [r q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r^2 q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \\ &+ r^3 q(\sin. 3\alpha \delta, \cos. 3\beta \delta) + \dots + r^{n-1} q(\sin. \{(n-1)\alpha \delta\}, \cos. \{(n-1)\beta \delta\})]. \end{aligned}$$

Nu kan men de bovenste grens $q = n\delta$ nader gaan bepalen; daartoe zij $n = 2a\pi b + 1$, dus $q = 2a\pi b\delta + \delta$; daar $n\delta$ een eindig getal was ondersteld, moest n oneindig zijn, en men kan aannemen, dat dit bij de nadere bepaling van n door den factor b ontstaat, die dan oneindig is, terwijl de factor $2a\pi$ eindig blijft. Neemt men dus $b\delta$ wederom $= c$, dan kan deze eene eindige grootheid wezen (even als vroeger q), hoezeer het oneindig zijn van c in het algemeen niet uitgesloten wordt. Men heeft derhalve

$$q = 2\alpha\pi c + \delta, \quad n = 2ab\pi + 1, \quad b\delta = c;$$

en de integraal wordt dus:

$$\int_{\delta}^{2\alpha\pi c + \delta} r^{\frac{x}{\delta}} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = \text{Lim. } \delta r [q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + r^2 q(\sin. 3\alpha \delta, \cos. 3\beta \delta) + \dots + r^{2ab\pi-1} q(\sin. 2ab\pi\alpha \delta, \cos. 2ab\pi\beta \delta)].$$

Hierin is a nog geheel willekeurig: men neme deze grootheid zoodanig aan dat $a\alpha$ en $a\beta$ beide geheele getallen worden; en dit is altijd mogelijk, zoo lang α en β slechts rationele grootheden zijn, want dan behoeft men voor a b. v. slechts het kleinste gemeene veelvoud van de noemers te nemen, die in de waarden van α en β voorkomen; het is echter duidelijk, dat a even goed elk veelvoud van dit gemeene veelvoud kan zijn. Bij deze onderstelling wordt, wanneer c eenig gedeelte van b voorstelt, zoodanig dat $e\delta$ 1, 2, 3 tot c wordt:

$$\sin. \{(2\pi ea + f)\alpha\delta\} = \sin. (2\pi. a\alpha. e\delta + f\alpha\delta) = \sin. f\alpha\delta,$$

$$\cos. \{(2\pi ea + f)\beta\delta\} = \cos. (2\pi. a\beta. e\delta + f\beta\delta) = \cos. f\beta\delta;$$

en derhalve ook:

$$q[\sin. \{(2\pi ea + f)\alpha\delta\}, \cos. \{(2\pi ea + f)\beta\delta\}] = q(\sin. f\alpha\delta, \cos. f\beta\delta).$$

Hierdoor verkrijgt de integraal den volgende vorm:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{2\alpha\pi c + \delta} r^{\frac{x}{\delta}} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= \text{Lim. } \delta r. \\ &[r(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{2a\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta) \\ &+ r^{2a\pi} q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r^{2a\pi+1} q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{4a\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta) \\ &+ r^{4a\pi} q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r^{4a\pi+1} q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{6a\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ r^{(c-1)2a\pi} q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r^{(c-1)2a\pi+1} q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{2ca\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta)] \\ &= \text{Lim. } \delta r (1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \dots + r^{(c-1)2a\pi}). \\ &[q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{2a\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta)]. \quad (B) \\ &= \text{Lim. } \delta r \frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} \times \\ &[q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + r q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + r^{2a\pi-1} q(\sin. 2a\pi\alpha \delta, \cos. 2a\pi\beta \delta)]. \quad (C) \end{aligned}$$

Om hier van de vergelijking (B) tot de volgende (C) te kunnen besluiten, heeft men evenwel nog enkele voorwaarden noodig, die men niet over

het hoofd mag zien, zoo als onder anderen door RAABE in het straks aangehaalde stuk is gedaan. Hier toch wordt eene reeks in eene geslotene uitdrukking getransformeerd, en het komt er dus op aan, om te weten of de reeks oneindig, en in dat geval, of zij convergent zij: immers, als de reeks oneindig en divergent tevens is, zoo wordt gezegde transformatie volstrekt onwettig; is de reeks daarentegen eindig, zoo mag men altijd daartoe overgaan. In het onderhavige geval heeft men dus daarop te letten, of r kleiner dan de eenheid zij; want alsdan is de reeks altijd convergent, en de gevolgtrekking is dus geoorloofd. Maar is r gelijk of grooter dan één, zoo geldt dit besluit niet langer, tenzij de reeks eindig zij, dat is c eene eindige waarde hebbe; want was daarbij c oneindig, en dus de reeks eene oneindige, zoo was zij divergent, althans niet meer convergerende. Het geval van $r = 1$ en c eindig willen wij dus het eerst beschouwen.

Ten eerste is alsdan onder het integraalteeken de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ na te gaan: deze wordt $1^{\frac{x}{\delta}}$ dus 1. Vervolgens heeft men in het tweede lid den factor $\frac{1 - r^{2\alpha\pi}}{1 - r^{2\pi}}$ en deze wordt $\frac{0}{0}$ voor $r = 1$; men moet dus teller en noemer ten opzichte van r differentiëren, en daarna wederom $r = 1$ stellen: deze bewerking geeft hier:

$$\frac{1 - r^{2\cos\pi}}{1 - r^{2\pi}} = \frac{-2c\alpha\pi r^{2\cos\pi-1}}{-2\alpha\pi r^{2\pi-1}} = c r^{(c-1)2\pi} = c.$$

Men heeft derhalve, — daar de grenzen voor de limiet nul van δ worden: 0 en $2\alpha\pi c$, en r gelijk één is ondersteld —:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\alpha\pi c} \varphi(\sin.\alpha x, \cos.\beta x) dx &= \text{Lim. } \delta.c \left[\varphi(\sin.\alpha\delta, \cos.\beta\delta) + \varphi(\sin.2\alpha\delta, \cos.2\beta\delta) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \varphi(\sin.2\alpha\pi\delta, \cos.2\alpha\pi\beta\delta) \right] \\ &= c \text{ Lim. } \delta \left[\varphi(\sin.\alpha\delta, \cos.\beta\delta) + \varphi(\sin.2\alpha\delta, \cos.2\beta\delta) + \dots + \varphi(\sin.2\alpha\pi\delta, \cos.2\alpha\pi\beta\delta) \right]; \end{aligned}$$

of wanneer men het tweede lid dezer vergelijking volgens de grondformule (A.) tot eene bepaalde integraal herleidt, waarbij dan even goed de grenzen 0 en $2\alpha\pi$ kunnen worden gesteld in plaats van δ en $2\alpha\pi + \delta$ — en dit is werkelijk geoorloofd, wanneer ten minste $\varphi(\sin.\alpha x, \cos.\beta x)$ voor de grens nul niet oneindig wordt, welke voorwaarde reeds in de integraal van het eerste lid ligt opgesloten. — ook de vergelijking:

$$\int_0^{2\alpha\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = c \int_0^{2\alpha\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx, (c \text{ eindig}) \dots \dots (XXXVI)$$

Men kan ook in dezelfde vergelijking (C), altijd bij de onderstelling dat c eindig blijft, $1 - f\delta$ als waarde voor r aannemen; alsdan verkrijgt de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ onder het integraalteeken eene andere waarde voor $\text{Lim. } \delta = 0$ namelijk $\text{Lim. } r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim. } (1 - f\delta)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim. } \left[(1 - f\delta)^{\frac{1}{f\delta}} \right]^{\frac{x}{\delta}} = \left[\text{Lim. } (1 - f\delta)^{\frac{1}{f\delta}} \right]^{\frac{x}{\delta}} = (e^{-1})^{fx} = e^{-fx}$, zoo als uit de theorie der limieten genoegzaam bekend is.

Tevens wordt alsdan:

$$\begin{aligned} \frac{1 - r^{2\alpha\pi}}{1 - r^{2\alpha}} &= \frac{1 - (1 - f\delta)^{2\alpha\pi}}{1 - (1 - f\delta)^{2\alpha}} = \frac{1 - \left\{ 1 - \frac{2c\alpha\pi}{1} f\delta + \frac{2c\alpha\pi}{1} \cdot \frac{2c\alpha\pi - 1}{2} f\delta^2 - \dots \right\}}{1 - \left\{ 1 - \frac{2\alpha\pi}{1} f\delta + \frac{2\alpha\pi}{1} \cdot \frac{2\alpha\pi - 1}{2} f\delta^2 - \dots \right\}} \\ &= \frac{\frac{2c\alpha\pi}{1} - \frac{2c\alpha\pi}{1} \cdot \frac{2c\alpha\pi - 1}{2} f\delta + \dots}{\frac{2\alpha\pi}{1} - \frac{2\alpha\pi}{1} \cdot \frac{2\alpha\pi - 1}{2} f\delta + \dots} = \frac{2c\alpha\pi}{2\alpha\pi} = c; \end{aligned}$$

zoodat hier dezelfde uitkomst verschijnt, als straks door het differentiëren van teller en noemer. Hierdoor wordt de vergelijking (C):

$$\int_0^{2\alpha\pi} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = \text{Lim. } \delta \left\{ (1 - f\delta) q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + (1 - f\delta)^2 q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots \right. \\ \left. + (1 - f\delta)^{2\alpha\pi} q(\sin. 2\alpha\pi\alpha\delta, \cos. 2\alpha\pi\beta\delta) \right\}$$

of, als men de derde of hoogere magten van δ verwaarloost:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\alpha\pi} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= c \{ \text{Lim. } \delta [q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots \\ &\quad + q(\sin. 2\alpha\pi\alpha\delta, \cos. 2\alpha\pi\beta\delta)] \\ &\quad - f \text{Lim. } \delta [\delta q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + 2\delta q(\sin. 2\alpha \delta, \cos. 2\beta \delta) + \dots + 2\alpha\pi\delta q(\sin. 2\alpha\pi\alpha\delta, \cos. 2\alpha\pi\beta\delta)] \}. \end{aligned}$$

Voert men hier wederom naar de grondvergelijking (A₁) bepaalde integralen in, zoo blijkt, dat de beide termen van het laatste lid dezer vergelijking, die elk door de limiet van eene reeks worden gevormd, kunnen worden voorgesteld door de bepaalde integralen

$$\int_0^{2\alpha\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx \quad \text{en} \quad \int_0^{2\alpha\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) x dx;$$

zoodat de vorige vergelijking wordt:

$$\int_0^{2a\pi} e^{-fx} q(\sin \alpha x, \cos \beta x) dx = c \int_0^{2a\pi} q(\sin \alpha x, \cos \beta x) dx - c f \int_0^{2a\pi} q(\sin \alpha x, \cos \beta x) x dx \\ = c \int_0^{2a\pi} q(\sin \alpha x, \cos \beta x) (1-fx) dx, (c \text{ niet } \infty). \quad (\text{XXXVII})$$

Bij de theoremata XXXVI en XXXVII moeten $a\alpha$ en $a\beta$ steeds geheele getallen zijn.

14. Wanneer c ook oneindig zijn kan, mag men de vergelijking (C) niet meer gebruiken, maar moet men zich dadelijk tot de vergelijking (B) wenden. Het tweede lid daarvan bevat onder anderen twee factoren, die beide reeksen zijn: de eerste daarvan

$$y = 1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \dots + r^{(c-1)2a\pi} \dots \dots \dots (ab)$$

wordt niet c oneindig, en derhalve ook divergent, zoodra r gelijk of grooter dan één is. Opdat dus de waarde der integraal niet oneindig worde, dat is, opdat de integraal zelve bestaan kunne, is het vooreerst noodzakelijk, dat de tweede reeks

$$z = \delta [\varphi(\sin \alpha \delta, \cos \beta \delta) + r \varphi(\sin 2\alpha \delta, \cos 2\beta \delta) + r^2 \varphi(\sin 3\alpha \delta, \cos 3\beta \delta) + \dots \\ + r^{2a\pi-1} \varphi(\sin 2a\pi\alpha \delta, \cos 2a\pi\beta \delta)] \dots (ac)$$

nul worde. Aan deze voorwaarde wordt voldaan door de volgende onderstelling:

$$\lim. \delta [\varphi(\sin \alpha \delta, \cos \beta \delta) + r \varphi(\sin 2\alpha \delta, \cos 2\beta \delta) + \dots + r \varphi(\sin 2a\pi\alpha \delta, \cos 2a\pi\beta \delta)] = 0; \quad (D)$$

dat is, wanneer men deze reeks volgens de grondformule (A₁) in eene bepaalde integraal overbrengt:

$$\int_0^{2a\pi} q(\sin \alpha x, \cos \beta x) dx = 0 \dots \dots \dots (E)$$

Dat deze onderstelling wezenlijk de gewenschte uitwerking heeft, althans voor het geval dat r juist één is, of de eenheid tot limiet heeft, hetgeen hier slechts te pas komt, blijkt op de volgende wijze. Wanneer men toch de formule (D) van (ac) aftrekt, zoo komt er:

$$\begin{aligned}
z &= -\delta \left[(1-r) \varphi(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + (1-r^2) \varphi(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots \right. \\
&\quad \left. + (1-r^{2a\pi-1}) \varphi(\text{Sin. } 2a\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2a\pi\beta\delta) \right] \\
&= -(1-r)\delta \left[\varphi(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + \frac{1-r^2}{1-r} \varphi(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r} \varphi(\text{Sin. } 2a\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2a\pi\beta\delta) \right].
\end{aligned}$$

Ten einde de waarde van z onder meer symmetrischen vorm te brengen, telle men daarbij den getallenvorm (D), waarvan de waarde nul is; dan wordt

$$\begin{aligned}
\gamma &= -(1-r)\delta \left[\varphi(\text{Sin. } \alpha\delta, \text{Cos. } \beta\delta) + 2\varphi(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + \left(1 + \frac{1-r^2}{1-r}\right) \varphi(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right) \varphi(\text{Sin. } 2a\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2a\pi\beta\delta) \right], \dots \dots \dots (ad)
\end{aligned}$$

Substitueert men deze waarde in de vergelijking (B) en bedenkt men, dat het produkt van den factor $(1-r)$ uit de waarde van z met de reeks y vermenigvuldigd, nu ook voor $r=1$ convergent moet zijn, en dat men dus nu ook hier stellen mag, dat

$$(1-r^{2a\pi})(1+r^{2a\pi}+r^{4a\pi}+\dots+r^{(c-1)2a\pi})=1-r^{2ca\pi}$$

is, zoo heeft men eindelijk voor de formule (B):

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^{2\pi a\pi + \delta} r^{\beta} \varphi(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx &= -\text{Lim. } \delta r \frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} (1-r^{2ca\pi}) \\
&\left[\varphi(\text{Sin. } \alpha\delta, \text{Cos. } \beta\delta) + 2\varphi(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + \left(1 + \frac{1-r^2}{1-r}\right) \varphi(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right) \varphi(\text{Sin. } 2a\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2a\pi\beta\delta) \right], \dots \dots \dots (ae)
\end{aligned}$$

en deze vergelijking geldt nu in het algemeen, hetzij c oneindig zij of niet, hetzij r één zij of niet, wanneer slechts de onderstelling (D) of (E) als waarheid kan worden aangenomen.

Wordt hierin vooreerst $r=1$, zoo is $\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} = \frac{0}{0}$, dus teller en noemer ten opzichte van r differentierende $\frac{-1}{-2a\pi r^{2a\pi-1}} = \frac{1}{2a\pi}$; $1-r^{2ca\pi}$ wordt $1-1=0$, zoo lang c eindig is althans; eindelijk is, even als vroeger $\text{Lim. } r^{\beta} = 1$. De

vergelijking wordt dus, wanneer men bij de grenzen ook $\text{Lim. } \delta = 0$ neemt:

$$\int_0^{2\pi\alpha} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = -1. \frac{1}{2\alpha\pi} \cdot 0. \text{Lim. } \delta \left[q(\sin. \alpha \delta, \cos. \beta \delta) + \dots \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{1 - r^{2\alpha\pi-1}}{1-r} \right) q(\sin. 2\alpha\pi\delta, \cos. 2\alpha\pi\beta\delta) \right] \\ = 0 \quad (c \text{ eindig}) \dots \dots \dots (\text{XXXVIII})$$

en dit komt, bij de onderstelling (E), die hier is aangenomen, geheel met het theorema (XXXVI) overeen.

Wordt daarentegen $r = 1 - \frac{\delta}{c}$, zoo is, zoo lang c eindig blijft,

$$\text{Lim.}_{r \rightarrow 1} \frac{x}{\delta} = \text{Lim.} \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.} \left[\left(1 - \frac{\delta}{c} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^x = \left[\text{Lim.} \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^x = (e^{-1})^x = e^{-1x} \dots (ag)$$

volgens eene bekende stelling uit de theorie der limieten. Vervolgens

$$\text{Lim.} \frac{1-r}{1-r^{2\alpha\pi}} = \text{Lim.} \frac{1 - \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)}{1 - \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)^{2\alpha\pi}} = \text{Lim.} \frac{\frac{\delta}{c}}{1 - \left\{ 1 - \frac{2\alpha\pi\delta}{1-c} + \frac{2\alpha\pi}{1} \frac{2\alpha\pi-1}{2} \frac{\delta^2}{c^2} - \dots \right\}} \\ = \text{Lim.} \frac{1}{\frac{2\alpha\pi}{1} - \frac{2\alpha\pi}{1} \frac{2\alpha\pi-1}{2} \frac{\delta}{c} + \dots} = \frac{1}{2\alpha\pi} \dots (ag)$$

en

$$\text{Lim.} \frac{1-r^{2\alpha\pi}}{\delta} = \text{Lim.} \frac{1-r^{2\alpha\pi\delta}}{\delta} = \frac{0}{0}, (\text{Lim } \delta = 0),$$

(wanneer men de waarde $c = b\delta$ substitueert) en dit wel voor elke eindige waarde van r . Men moet dus hier ten opzichte van δ den teller en den noemer differentiëren, en verkrijgt dan:

$$\text{Lim.} \frac{1-r^{2\alpha\pi\delta}}{\delta} = \text{Lim.} \frac{-r^{2\alpha\pi\delta} 2\alpha\pi l r}{1} = \text{Lim.} (-2\alpha\pi b l r. r^{2\alpha\pi\delta}) = \text{Lim.} (-2\alpha\pi b l r. r^{2\alpha\pi}),$$

wanneer men in den laatsten factor $c = b\delta$ substitueert. Nu is:

$$\text{Lim.} b l r = \text{Lim.} \frac{c}{\delta} l \left(1 - \frac{\delta}{c} \right) = \text{Lim.} c \frac{l \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)}{\delta} = \frac{0}{0};$$

dus wederom teller en noemer ten aanzien van δ differentiërende:

$$\text{Lim. } bdr = \text{Lim. } c \left\{ \frac{-\frac{1}{c}}{1 - \frac{\delta}{c}} \right\} = \text{Lim. } \left\{ \frac{-1}{1 - \frac{\delta}{c}} \right\} = -1,$$

en

$$\text{Lim. } r^{2\alpha\pi} = \left(1 - \frac{\delta}{c} \right)^{2\alpha\pi} = 1;$$

waaruit eindelijk volgt

$$\text{Lim. } \frac{1 - r^{2\alpha\pi}}{\delta} = -2\alpha\pi \cdot (-1) \cdot (1) = +2\alpha\pi \dots\dots\dots (ah)$$

Wanneer men nu deze uitkomsten (af), (ag) en (ah) in de vergelijking (ae) overbrengt, en daarbij bedenkt, dat voor $r = 1 - \frac{\delta}{c}$ naar de formule (ag)

$$1 + \frac{1 - r^{s-1}}{1 - r} = 1 + (s-1) = s$$

is, zoo heeft men ten laatste:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi\alpha c} e^{-\frac{1}{c}x} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx &= -\text{Lim. } \delta \cdot \frac{1}{2\alpha\pi} (2\alpha\pi)\delta \left[q(\text{Sin. } \alpha\delta, \text{Cos. } \beta\delta) + 2q(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + \right. \\ &\quad \left. + 3q(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots + 2\alpha\pi q(\text{Sin. } 2\alpha\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2\alpha\pi\beta\delta) \right] \\ &= -\text{Lim. } \delta \left[\delta q(\text{Sin. } \alpha\delta, \text{Cos. } \beta\delta) + 2\delta q(\text{Sin. } 2\alpha\delta, \text{Cos. } 2\beta\delta) + 3\delta q(\text{Sin. } 3\alpha\delta, \text{Cos. } 3\beta\delta) + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\pi\delta q(\text{Sin. } 2\alpha\pi\alpha\delta, \text{Cos. } 2\alpha\pi\beta\delta) \right]; \end{aligned}$$

of, wanneer men de laatste reeks naar de algemeene grondformule tot eene bepaalde integraal herleidt:

$$\int_0^{2\pi\alpha c} e^{-\frac{1}{c}x} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx = - \int_0^{2\alpha\pi} \varphi(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) x dx. \quad (c \text{ eindig}). \quad (\text{XXXIX})$$

En dit komt wederom overeen met de formule (XXXVII), als men daar $f = \frac{1}{c}$ neemt, waardoor $cf = 1$ wordt, en men tevens bedenkt dat hier, volgens de voorwaardevergelijking (E) de eerste integraal in het tweede lid dier vergelijking (XXXVII) verdwijnt.

Wanneer eindelijk c oneindig wordt, zoo verandert de vorige redenering niet, dan ten opzichte van den factor $r^{\frac{x}{c}}$ onder het integraalteeken. Reeds da-

delijk konde men wel is waar in dat geval voor $e^{-\frac{1}{c}x}$ aannemen e^{-x} dat is 1, maar tot dezelfde uitkomst kan men ook op eene meer zekere wijze aldus geraken. In aanmerking nemende, dat men, zoo c oneindig is, ook daarvoor $\frac{1}{\delta}$ stellen kan, heeft men $r = 1 - \frac{\delta}{c} = 1 - \delta^2$, en vervolgens:

$$\begin{aligned} \text{Lim. } r^{\frac{x}{\delta}} &= \text{Lim. } (1 - \delta^2)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim. } (1 + \delta)^{\frac{x}{\delta}(1 - \delta)^{\frac{x}{\delta}}} = [\text{Lim. } (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}]^x [\text{Lim. } (1 - \delta)^{\frac{1}{\delta}}]^x \\ &= [e^1]^x [e^{-1}]^x = e^x \cdot e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

In plaats van de vergelijking XXXIX komt hier dus, als men k voor c schrijft:

$$\int_0^{2\pi ak} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx = - \int_0^{2a\pi} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) x dx, \quad (k = \infty). \quad \dots \quad (\text{XL})$$

Bij de theoremata (XXXVIII), (XXXIX) en (XL) moet men niet vergeten, dat steeds de formules (D) of (E) als voorwaarde zijn aangenomen, en tevens even als vroeger $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen moesten zijn.

15. Tot nog toe behandelden wij slechts de integralen die 0 en $2\pi ac$, eenig veelvoud van 2π , tot grenzen hadden; thans kunnen wij evenwel de beschouwing verder uitstrekken, en aan dezelfde integralen de grenzen 0 en $2\pi ac + b$ toekennen, waar dan b natuurlijk kleiner dan 2π moet zijn. In de theoremata XXXVI tot XL komen twee vormen van integralen voor, die dan hier worden:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi ac+b} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx &= \int_0^{2\pi ac} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx, \\ \int_0^{2\pi ac+b} e^{-fx} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx &= \int_0^{2\pi ac} e^{-fx} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} e^{-fx} q(\text{Sin. } \alpha x, \text{Cos. } \beta x) dx, \end{aligned}$$

wanneer men den grensafstand 0 tot $2\pi ac + b$ in twee andere verdeelt, eenen van 0 tot $2\pi ac$ en den anderen van $2\pi ac$ tot $2\pi ac + b$. De beide eerste integralen in het tweede lid dezer vergelijkingen zijn nu dezelfde als in de genoemde theoremata worden bepaald; de beide laatsten laten zich gemakkelijk vereenvoudigen, en wel door $2\pi ac + y$ voor x te nemen. Daardoor wordt $dx = dy$, terwijl men 0 en b als grenzen voor y verkrijgt: verder is:

$$\begin{aligned}
 q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) &= q(\sin. \{\alpha(2\pi c + y)\}, \cos. \{\beta(2\pi c + y)\}) \\
 &= q(\sin. \{2\pi c \alpha + \alpha y\}, \cos. \{2\pi c \beta + \beta y\}) \\
 &= q(\sin. \alpha y, \cos. \beta y),
 \end{aligned}$$

daar volgens de onderstelling $a\alpha$, en $a\beta$ beide geheele getallen moeten blijven. Verder is

$$e^{-fx} = e^{-f \cdot 2\pi c \alpha + y} = e^{-2\pi c \alpha f - fy} = e^{-2\pi c \alpha f} e^{-fy};$$

en dus worden de boven behandelde integralen:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^{2\pi c \alpha + b} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= \int_0^{2\pi c \alpha} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx + \int_0^b q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx, \\
 \int_0^{2\pi c \alpha + b} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= \int_0^{2\pi c \alpha} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx + e^{-2\pi c \alpha f} \int_0^b e^{-fy} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx.
 \end{aligned} \right\} (ai)$$

In deze transformatie-formulen (ai) voor de eerste integralen van het tweede lid de verschillende uitkomsten substituerende, die in de theoremata (XXXVI) tot (XL) verkregen zijn, komt er achtereenvolgens:

$$\int_0^{2\pi c \alpha + b} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = c \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx + \int_0^b q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx \quad (c \text{ eindig}), (XLI)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi c \alpha + b} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= c \int_0^{2\pi} e^{-fx} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx - cf \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) x dx \\
 &\quad + e^{-2\pi c \alpha f} \int_0^b e^{-fy} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx, \quad (c \text{ eindig}) \quad \dots (XLI.I)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi c \alpha + b} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = \int_0^b q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx \quad (c \text{ eindig}) \quad \dots \dots \dots (XLIII)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi c \alpha + b} e^{-\frac{1}{c}x} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx &= - \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) x dx + \\
 &\quad + e^{-2\pi} \int_0^b e^{-\frac{1}{c}x} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx \quad (c \text{ eindig}) \quad \dots (XLI.V)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi c \alpha + b} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = - \int_0^{2\pi} q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) x dx + \int_0^b q(\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx, (k = \infty), (XL.V)$$

Bij deze vijf vergelijkingen is het volgende op te merken:

7

1°. $b < 2\pi$.2°. $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen.

3°. De drie laatste vergelijkingen bestaan slechts onder de voorwaarde

$$\int_0^{2a\pi} q (\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx = 0 \dots\dots\dots (E)$$

De onderlinge vergelijking der beide theoremata (XL) en (XLV) leert nu, dat de integraal

$$\int_0^{\infty} q (\sin. \alpha x, \cos. \beta x) dx$$

verschillende waarden verkrijgt, naarmate ∞ van den vorm $2a\pi k$ of $2a\pi k + b$ is, voor $k = \infty$, en hiermede is hetgeen in N°. 1 is aangevoerd genoegzaam bewezen. Het behoeft nauwelijks te worden opgemerkt, dat de vergelijkingen (XXXVII) en (XLII) respectie in (XXXVI) en (XLI) overgaan, zoodra f gelijk nul wordt gesteld.

16. Neemt men als toepassing

$$q (\sin. \alpha x, \cos. \beta x) = \sin. \frac{px}{q} \text{ en } = \cos. \frac{px}{q},$$

zoo is respectie

$$\alpha = \frac{p}{q}, \beta = 0 \text{ en } \alpha = 0, \beta = \frac{p}{q};$$

om derhalve de produkten $a\alpha$ en $a\beta$ tot geheele getallen te maken, behoeft men, als p en q geheele getallen voorstellen, slechts $a = q$ te nemen. In deze gevallen is zowel bij de eene als bij de andere onderstelling:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2q\pi} \sin. \frac{px}{q} dx &= q \int_0^{2\pi} \sin. py dy = -\frac{q}{p} \int_0^{2\pi} \frac{d \cos. py}{dy} dy = -\frac{q}{p} \{ \cos. py \}_0^{2\pi} = -\frac{q}{p} (1-1) = 0, \\ \int_0^{2q\pi} \cos. \frac{px}{q} dx &= q \int_0^{2\pi} \cos. py dy = \frac{q}{p} \int_0^{2\pi} \frac{d \sin. py}{dy} dy = \frac{q}{p} \{ \sin. py \}_0^{2\pi} = \frac{q}{p} (0-0) = 0; \end{aligned} \right\} (ak)$$

— wanneer men eerst $x = qy$ stelt, en vervolgens verder herleidt. —

Aan de voorwaardenvergelijking (E) wordt dus hier voldaan, en dien ten gevolge geven de theoremata (XXXVIII) en (XL):

$$\int_0^{2\pi q^k} \text{Sin.} \frac{p x}{q} d x = 0, \dots\dots\dots (52)$$

$$\int_0^{2\pi q^k} \text{Cos.} \frac{p x}{q} d x = 0, \dots\dots\dots (53)$$

$$\int_0^{2\pi q^k} \text{Cos.} \frac{p x}{q} d x = - \int_0^{2q\pi} \text{Cos.} \frac{p x}{q} x d x = - \frac{q^2}{p^2} \int_0^{2p\pi} \text{Cos.} y . y d y = 0, (\text{V.T. 255. N}^\circ 1), (k = \infty), (54)$$

$$\int_0^{2\pi q^k} \text{Sin.} \frac{p x}{q} d x = - \int_0^{2q\pi} \text{Sin.} \frac{p x}{q} x d x = - \frac{q^2}{p^2} \int_0^{2p\pi} \text{Sin.} y . y d y, (k = \infty).$$

In de beide laatste is $x = \frac{q}{p} y$ genomen. Om de laatste bepaalde integraal te vinden, zal men den grensafstand 0 tot $2 p \pi$ in p andere moeten verdeelen, die elk 2π bedragen, namelijk van 0 tot 2π , van 2π tot 4π , enz. van $c . 2 \pi$ tot $(c-1) . 2 \pi$ en van $(p-1) . 2 \pi$ tot $p . 2 \pi$. Verder in eenige integraal, van $c . 2 \pi$ tot $(c+1) . 2 \pi$ genomen, moet men $y = 2 c \pi + x$ stellen, dan worden de grenzen van x : 0 en 2π ; met $d x = d y$, $\text{Sin.} x = \text{Sin.} y$; daar verder voor de factor y onder het integraalteeken $2 c \pi + x$ komt, kan men zoodanige integraal in twee andere ontbinden, eene met $2 c \pi$ als factor, (die als constant buiten het integraalteeken te brengen is), en eene andere, waar x als factor onder het integraalteeken blijft staan, dat is

$$\int_{c . 2 \pi}^{(c+1) . 2 \pi} \text{Sin.} y . y d y = 2 c \pi \int_0^{2 \pi} \text{Sin.} x d x + \int_0^{2 \pi} \text{Sin.} x . x d x.$$

De integralen der eerste soort zijn alle van denzelfden vorm als de eerste der integralen (ak) en verdwijnen dus. Die der tweede soort zijn daarentegen alle gelijk, en hebben volgens mijne Tafels T. 250. N^o. 1 tot waarde -2π ; zulke zijn er p dus is:

$$\int_0^{2 p \pi} \text{Sin.} x . x d x = -2 p \pi; \dots\dots\dots (55)$$

en derhalve

$$\int_0^{2 \pi q^k} \text{Sin.} \frac{p x}{q} d x = \frac{2 q^2 \pi}{p}, (k = \infty) \dots\dots\dots (56)$$

Vervolgens geven de theoremeta (XLIII) en (XLV), met behulp der reeds gevonden uitkomsten:

$$\int_0^{2\pi q r + b} \text{Sin.} \frac{p x}{q} dx = \int_0^b \text{Sin.} \frac{p x}{q} dx = \frac{q}{p} \left(1 - \text{Cos.} \frac{p b}{q} \right), \dots\dots\dots (57)$$

$$\int_0^{2\pi q r + b} \text{Cos.} \frac{p x}{q} dx = \int_0^b \text{Cos.} \frac{p x}{q} dx = \frac{q}{p} \text{Sin.} \frac{p b}{q}, \dots\dots\dots (58)$$

$$\int_0^{2\pi q k + b} \text{Sin.} \frac{p x}{q} dx = -\frac{2 q^2 \pi}{p} + \int_0^b \text{Sin.} \frac{p x}{q} dx = -\frac{2 q^2 \pi}{p} + \frac{q}{p} \left(1 - \text{Cos.} \frac{p b}{q} \right), (k = \infty). (59)$$

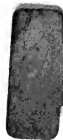
$$\int_0^{2\pi q k + b} \text{Cos.} \frac{p x}{q} dx = \int_0^b \text{Cos.} \frac{p x}{q} dx = \frac{q}{p} \text{Sin.} \frac{p b}{q}, \dots\dots\dots (60)$$

Hieruit ziet men, dat de gewoonlijk gebruikte uitkomsten

$$\int_0^\infty \text{Sin.} x dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \text{Cos.} x dx = 0,$$

zie *Tables etc.*, T. 96, N°. 2, 5, niet geldende kunnen zijn.







HERBERT A. J. J. J. J.